В.Б. Полонський, Ю.М. Рабинович, М.С. Якір

ВЧИМОСЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ З ГЕОМЕТРІЇ

«Магістр-S»

Творча спілка вчителів України
Асоціація вчителів математики

В.Б. Полонський
Ю.М. Рабинович
М.С. Якір

ВЧИМОСЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ З ГЕОМЕТРІЇ

Навчально-методичний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти України

Київ
«Магістр-S»
1998

ББК 22.151.Оя721
П52

Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С.
Вчимося розв'язувати задачі з геометрії. Навч.-метод. посібник. — К.: «Магістр-S», 1998. — 256 с.
ISBN 966-557-008-0

Переклад з російського видання
видавництва «Магістр-S» із змінами

Рекомендовано Міністерством освіти України (лист Міністерства освіти України № 1/11-791 від 6.05.97)

Посібник, написаний у формі конспекта досвідченого вчителя, містить понад 1000 задач з великою кількістю прикладів, їх розв'язками та аналізом. На різноманітному матеріалі автори систематизували за методами розв'язань основні типи задач шкільної планіметрії. В основі систематизації лежить принцип від простого до складного.

Для учнів 7-11 класів, абітурієнтів, учителів математики.

П $\frac{1602050000-001}{98}$ без оголошення ББК 22.151.Оя721

ISBN 966-557-008-0

© Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С., 1998
© «Магістр-S», 1998

Від авторів

Це не збірник задач, хоча в книжці їх понад 1000. Незважаючи на велику кількість розглянутих прикладів, це й не розв'язник, наявність якого в учня так дратує вчителя. Найімовірніше — це добротний конспект, написаний учителем не тільки для «службового використання», а також дидактичний матеріал, який буде доречним на парті кожного учня.

Коротко спинимося на змісті кожної глави. Матеріал глави I доцільно використовувати на початковому етапі вивчення основних тем планіметрії. На думку авторів, форма умови задач (готові креслення) дає змогу наочно і динамічно «увійти» в тему.

Відомо, що задача може бути не тільки метою, а й засобом навчання. Вчитися розв'язувати задачі за допомогою ключових (опорних, базисних) задач — ідея не нова. Особливість глави II в тому, що читач має можливість зануритися відразу в усю планіметрію, побачивши її як єдине ціле.

Главу III присвячено як традиційним методам, так і оригінальним прийомам розв'язування задач.

Як навчитися бачити, що для розв'язання задачі потрібно розглянути кілька випадків, а не «хапатися» за той, що лежить на поверхні? Глава IV допомагає відповісти на це запитання.

Главу I написав Ю.М. Рабинович, глави II і III написали спільно всі автори, главу IV — В.Б. Полонський і М.С. Якір.

Автори висловлюють щиру подяку П.І. Горнштейну, який надав величезний архів геометричних задач, А.Г. Мерзляку і М.Ю. Рабиновичу, чиї корисні поради сприяли удосконаленню рукопису.

Глава I

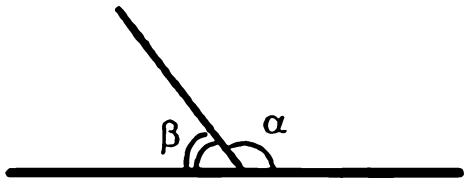
Геометрія на готових кресленнях

7 КЛАС

7.1. Суміжні та вертикальні кути.
7.2. Ознаки рівності трикутників.
7.3. Рівнобедрений трикутник.
7.4. Ознаки паралельності прямих.
7.5. Ознаки паралельності прямих.
7.6. Сума кутів трикутника.
7.7. Сума кутів трикутника.
7.8. Прямокутний трикутник.
7.9. Коло.

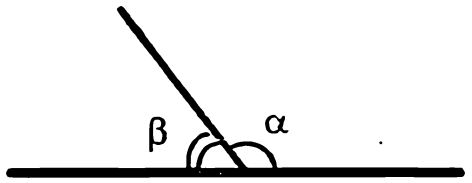
Таблиця 7.1. Суміжні та вертикальні кути

1



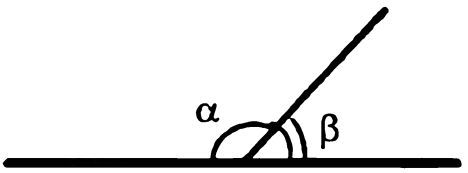
Дано: $\alpha - \beta = 30°$.
Знайти: α, β.

2



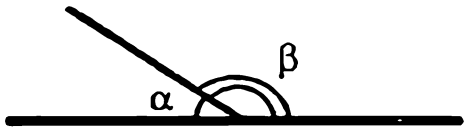
Дано: $\alpha = 90° + \beta$.
Знайти: α, β.

3



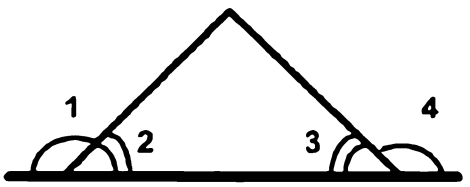
Дано: $\alpha = 3\beta$.
Знайти: α, β.

4



Дано: $\alpha : \beta = 1 : 5$.
Знайти: α, β.

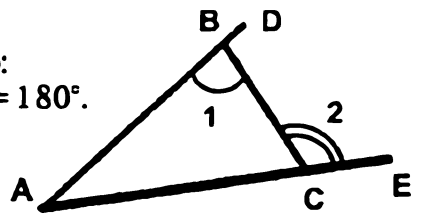
5



Дано: $\angle 1 = \angle 4$.
Довести: $\angle 2 = \angle 3$.

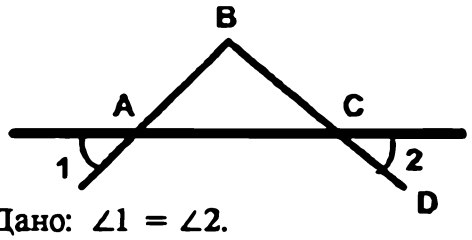
6

Дано:
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$.



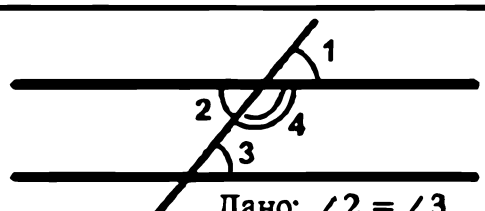
Довести: 1) $\angle ABC = \angle ACB$;
2) $\angle DBC = \angle BCE$.

7



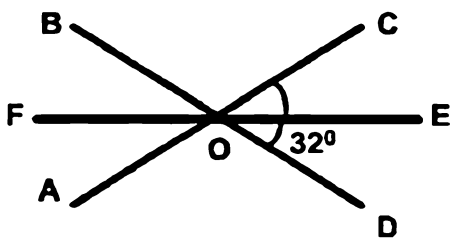
Дано: $\angle 1 = \angle 2$.
Довести: $\angle BAC + \angle ACD = 180°$.

8



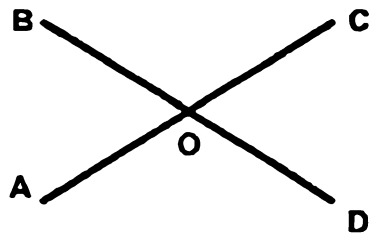
Дано: $\angle 2 = \angle 3$.
Довести: 1) $\angle 1 = \angle 3$;
2) $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

9



Знайти: $\angle BOC$.

10

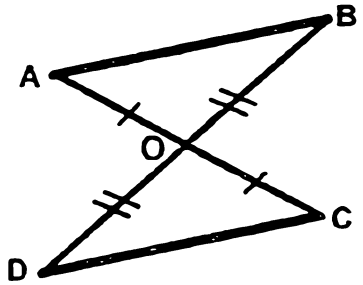


Дано: $\angle AOB = \frac{1}{8}(\angle BOC + \angle COD + \angle DOA)$.
Знайти: $\angle AOB$; $\angle BOC$; $\angle COD$; $\angle DOA$.

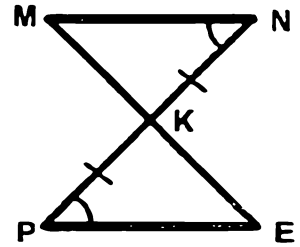
Таблиця 7.2. **Ознаки рівності трикутників**

Вказати пари рівних трикутників і довести їх рівність:

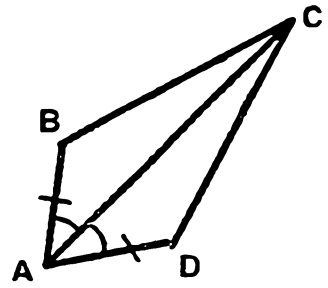
1



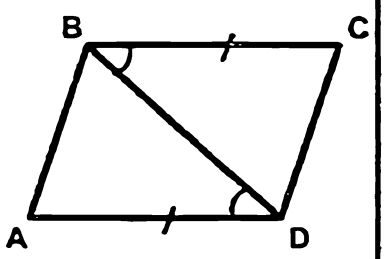
2



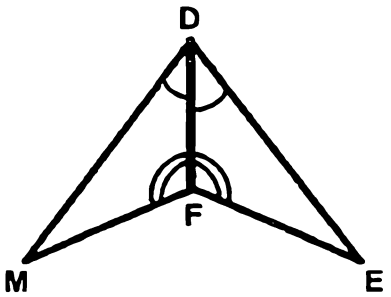
3



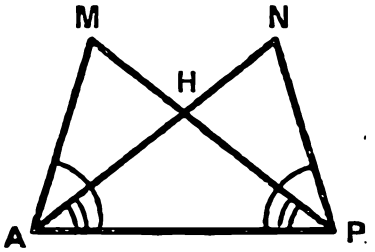
4



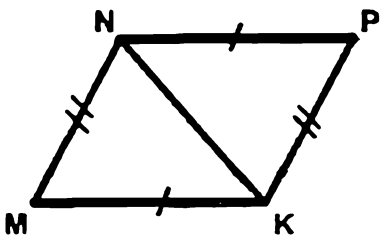
5



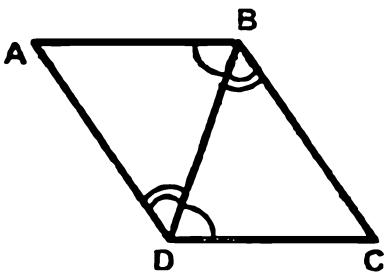
6



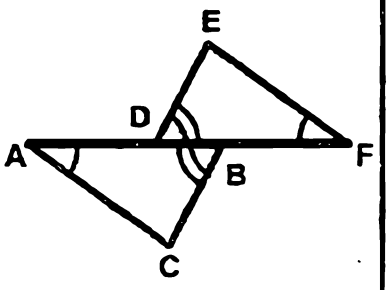
7



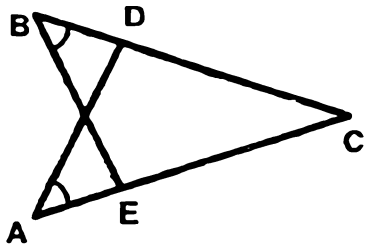
8



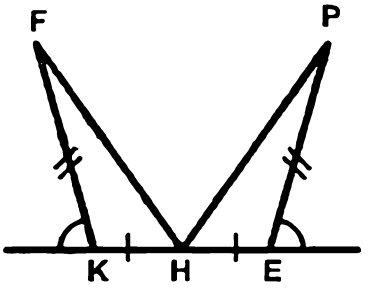
9 Дано: $AD = BF$.



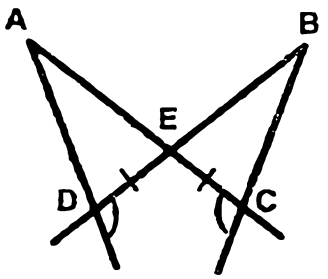
10 Дано: $AC = BC$.



11

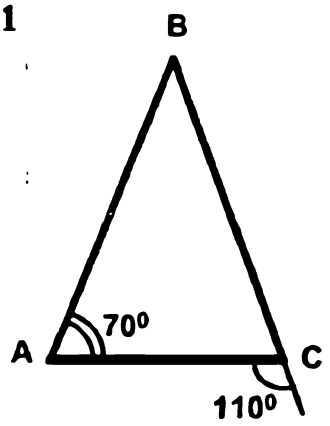


12

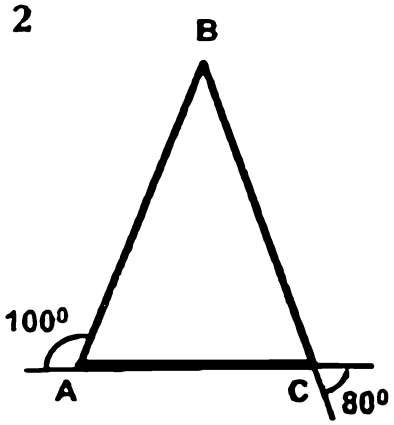


Таблиця 7.3. **Рівнобедрений трикутник**
Довести: ΔABC — рівнобедрений.

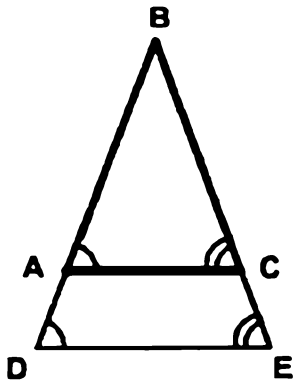
1



2

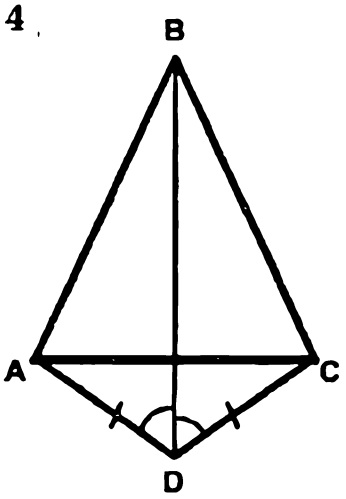


3

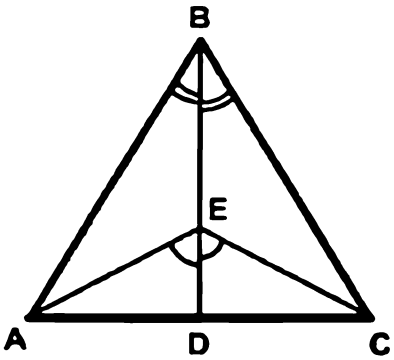


Дано: $BD = BE$.

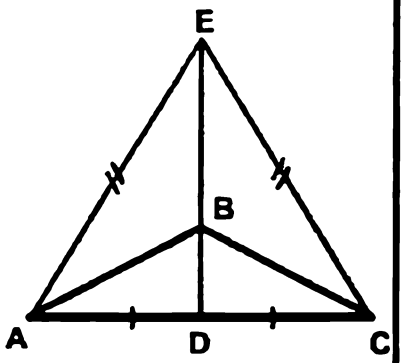
4



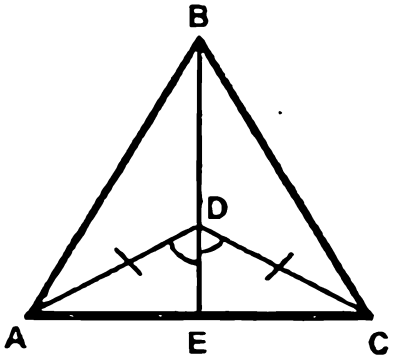
5



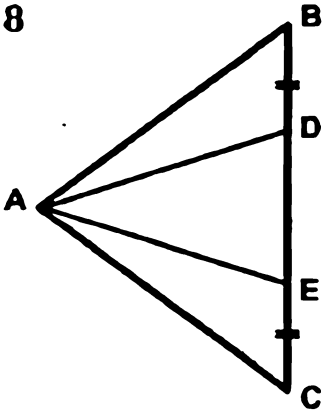
6



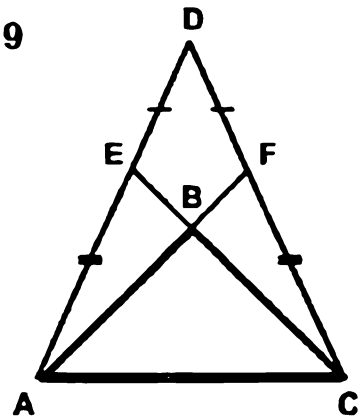
7



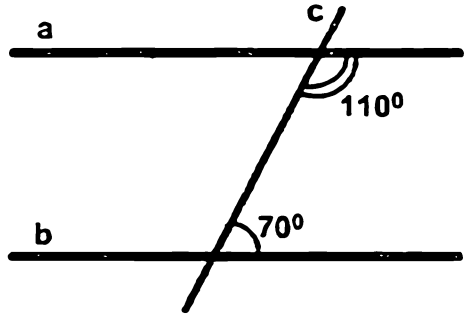
8

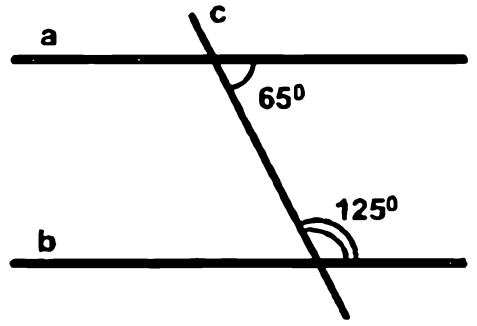


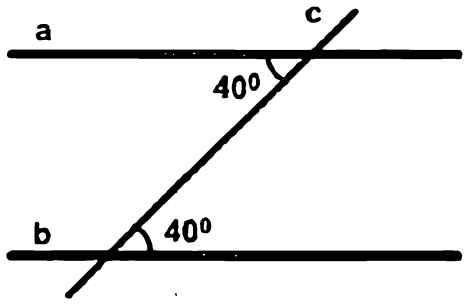
9

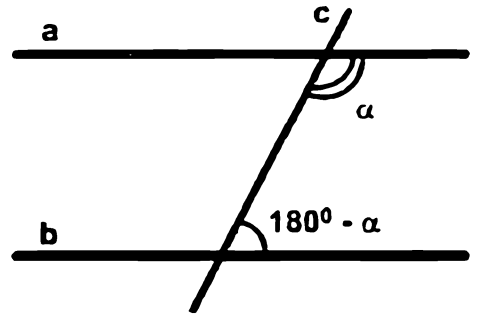


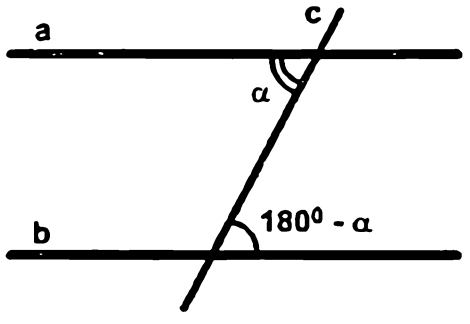
Таблиця 7.4. **Ознаки паралельності прямих**
Чи паралельні прямі a і b?

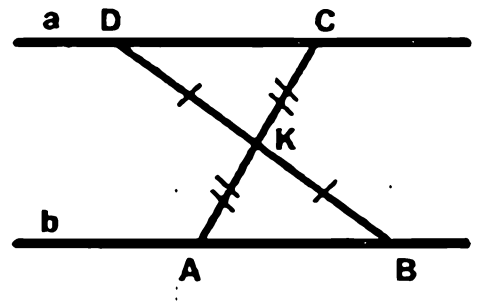
1


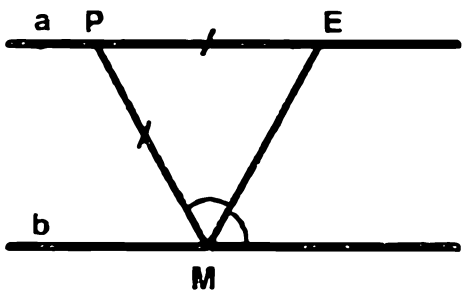
2


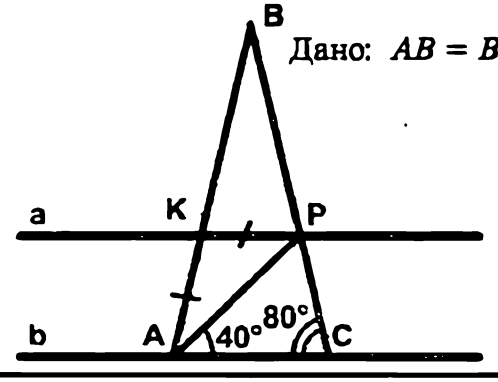
3


4


5


6


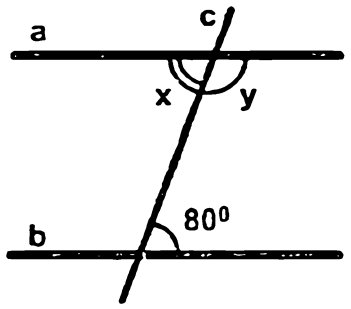
7


8


Таблиця 7.5. Ознаки паралельності прямих

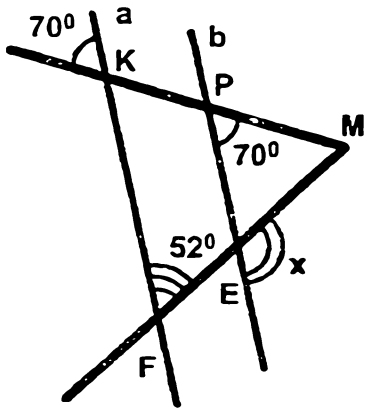
У задачах 1-6 знайти x і y.

1

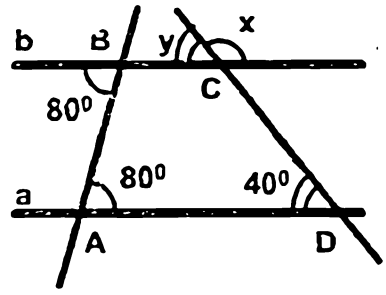


Дано: $a \parallel b$.

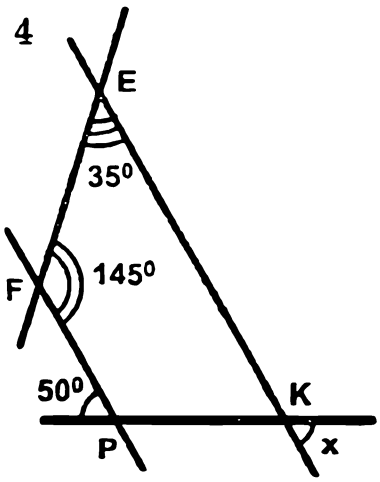
2



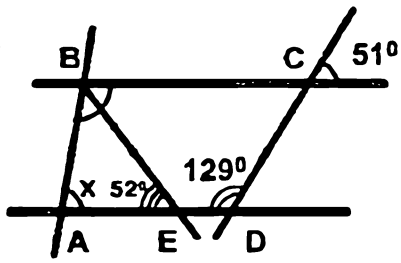
3



4

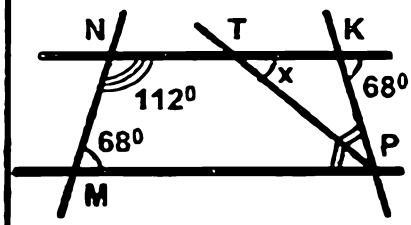


5

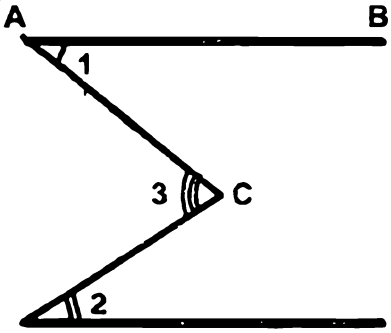


Дано: $\angle ABE = \angle CBE$.

6

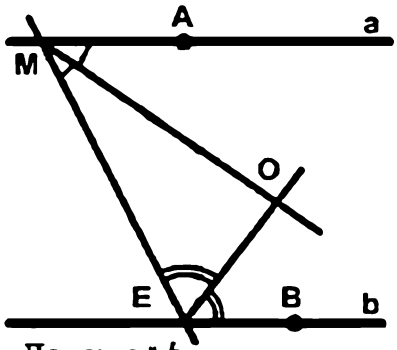


7



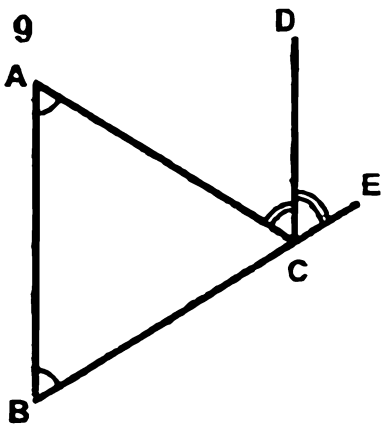
Дано: $AB \parallel DE$.
Довести: $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$.

8



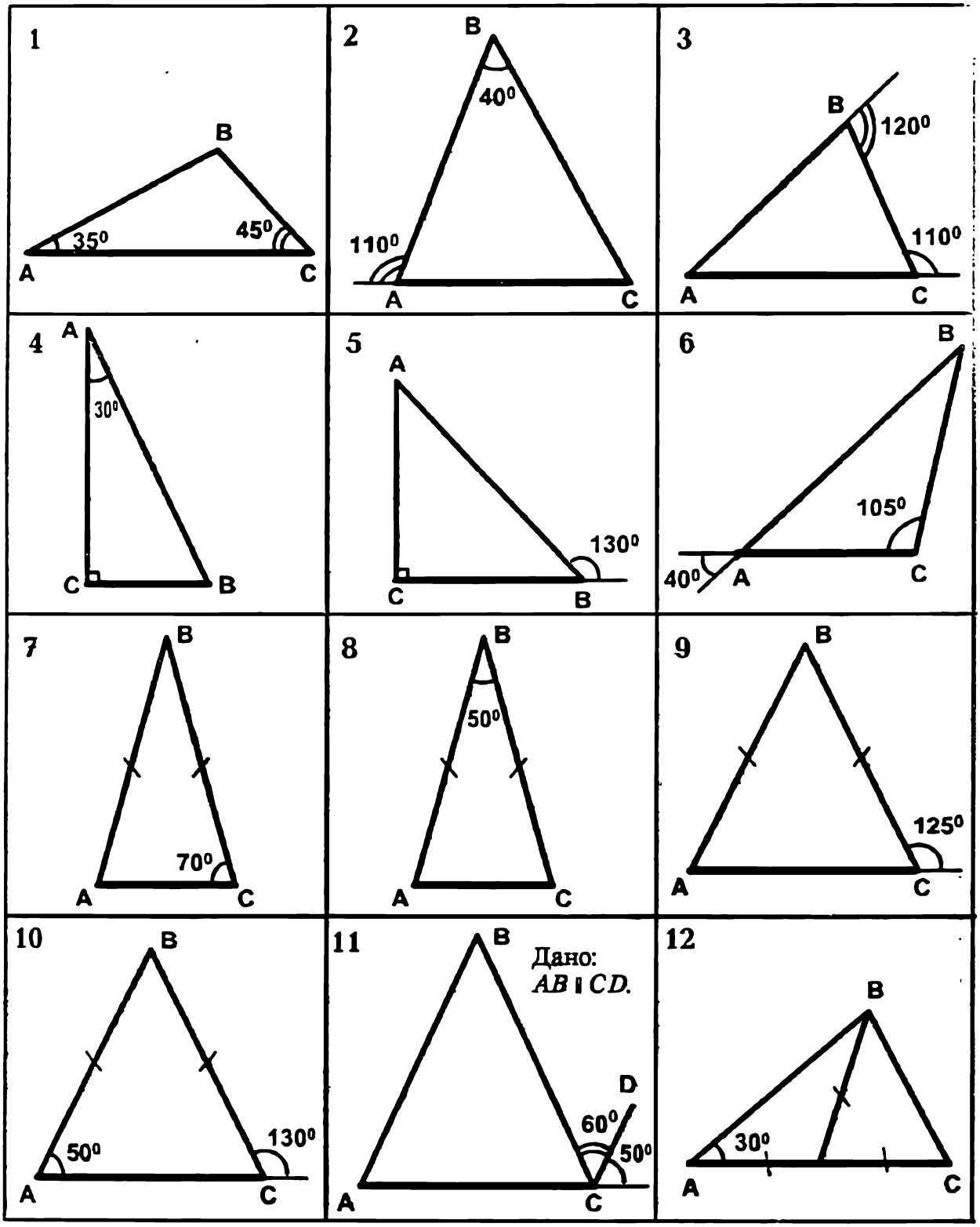
Дано: $a \parallel b$.
Довести: $\angle MOE = 90°$.

9



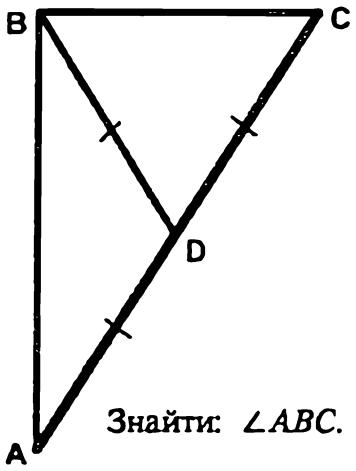
Довести: $AB \parallel CD$.

Таблиця 7.6. **Сума кутів трикутника**
Знайти невідомі кути ΔABC.



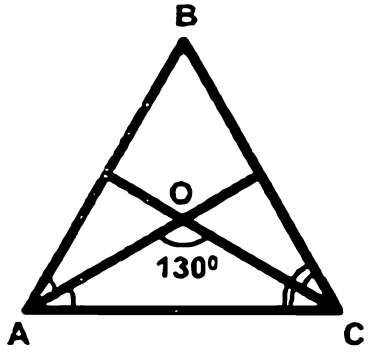
Таблиця 7.7. **Сума кутів трикутника**

1



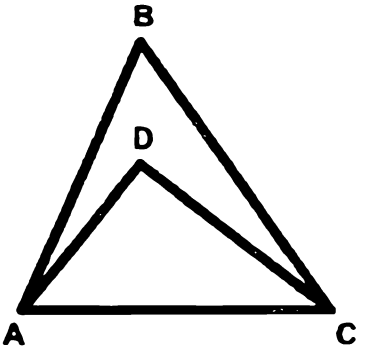
Знайти: $\angle ABC$.

2



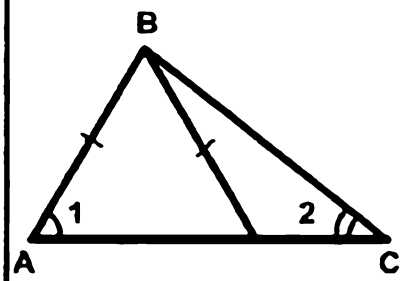
Знайти: $\angle ABC$.

3



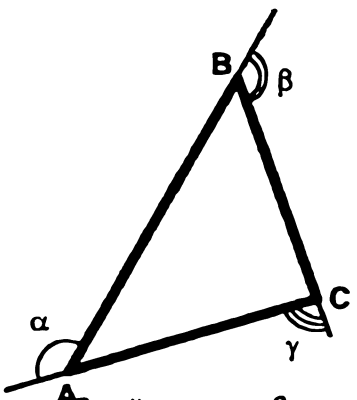
Довести:
$\angle ABC < \angle ADC$.

4



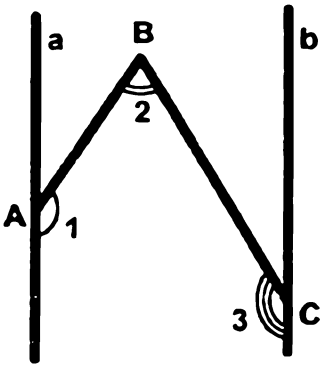
Довести: $\angle 1 > \angle 2$.

5



Знайти: $\alpha + \beta + \gamma$.

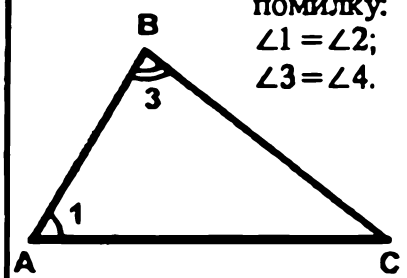
6

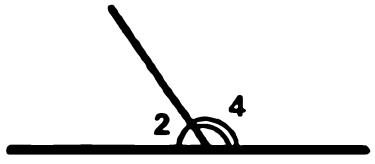


Дано: $a \parallel b$.
Довести:
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$.

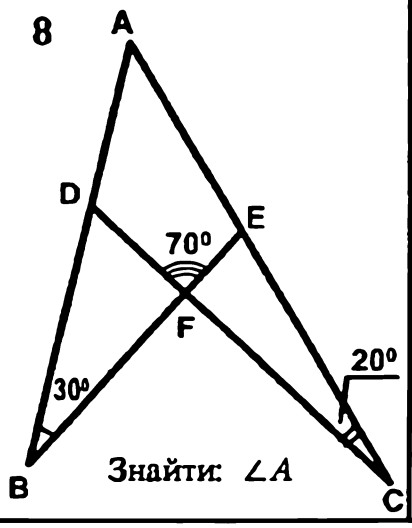
7

Знайти помилку:
$\angle 1 = \angle 2$;
$\angle 3 = \angle 4$.



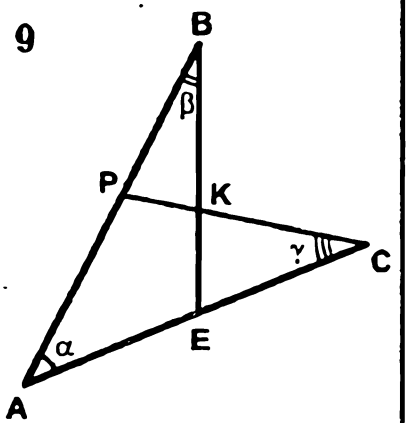


8



Знайти: $\angle A$

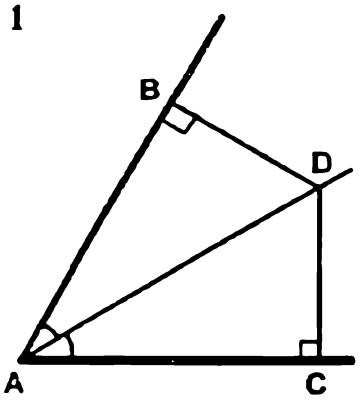
9



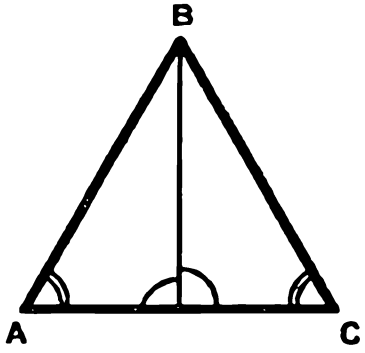
Знайти: $\angle EKC$.

Таблиця 7.8. **Прямокутний трикутник**
Знайти рівні трикутники (задачі 1-3).

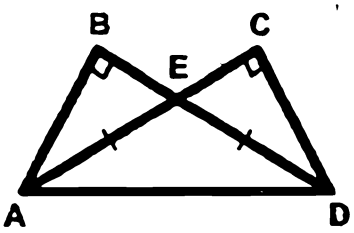
1



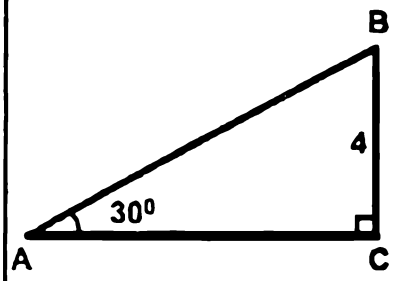
2



3

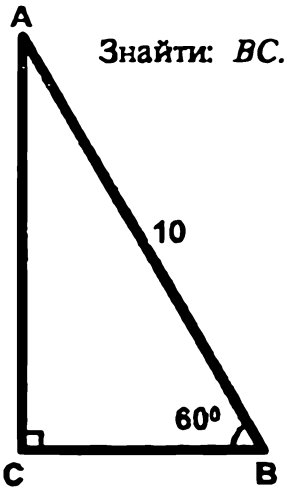


4



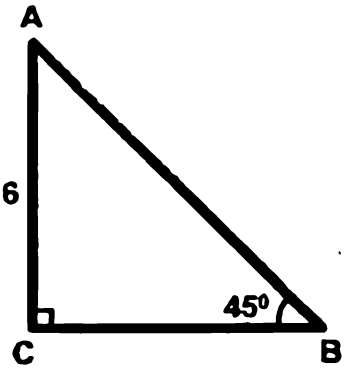
Знайти: *AB*.

5



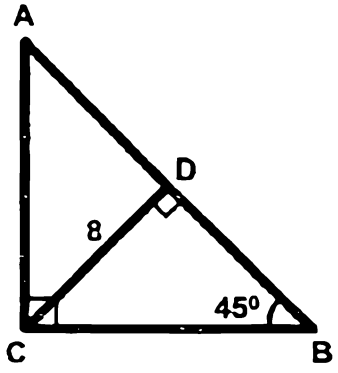
Знайти: *BC*.

6



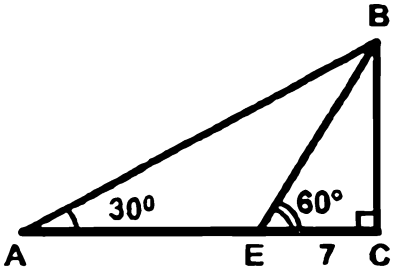
Знайти: *BC*.

7



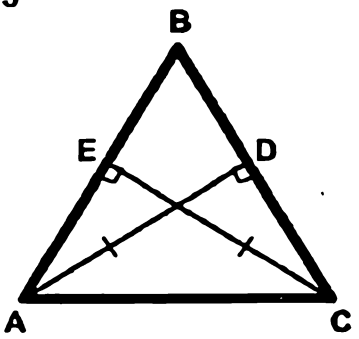
Знайти: *AB*.

8



Знайти: *AE*.

9

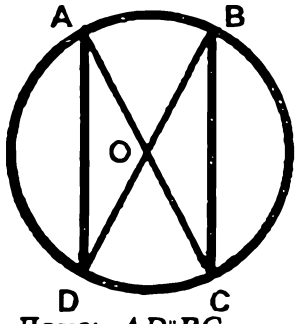


Дано: $AB = BC$.
Довести: $AD = CE$.

Таблиця 7.9. **Коло**

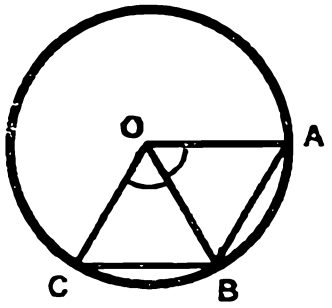
O — центр кола.

1



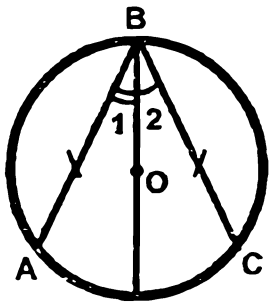
Дано: $AD \parallel BC$
Довести: $AD = BC$.

2



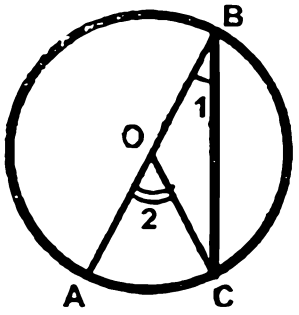
Довести: $AB = BC$.

3



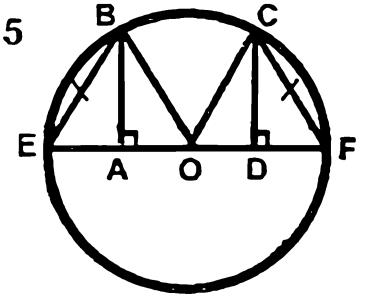
Довести: $\angle 1 = \angle 2$.

4



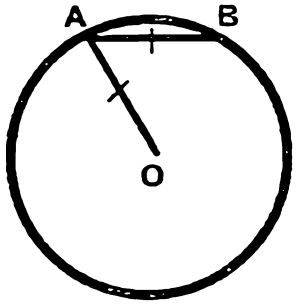
Довести: $\angle 2 = 2\angle 1$.

5



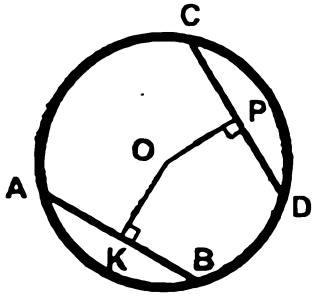
Довести: $CD = BA$.

6



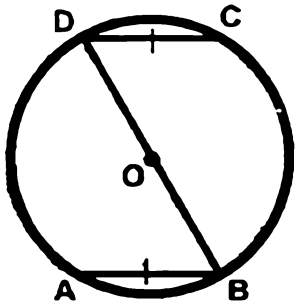
Знайти: $\angle BAO$.

7



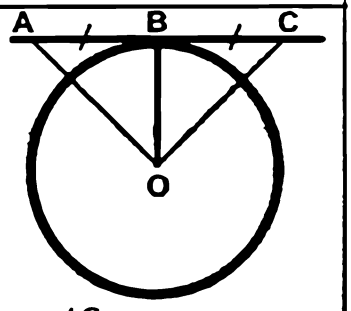
Дано: $AB = CD$.
Довести: $OK = OP$.

8



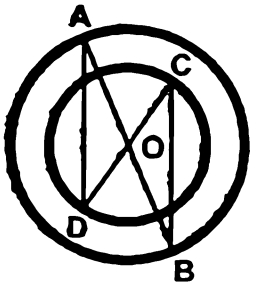
Довести: $AB \parallel CD$.

9



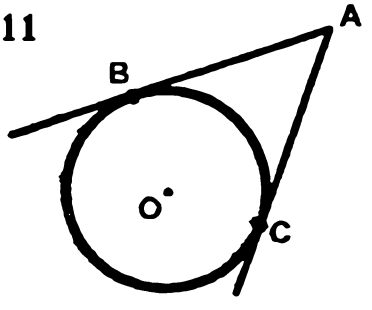
Дано: AC — дотична.
Довести: $OA = OC$.

10



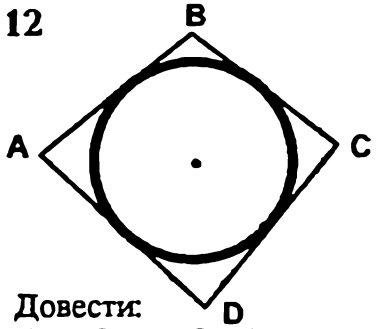
Довести: $AD = BC$.

11



Довести: $AB = AC$.

12



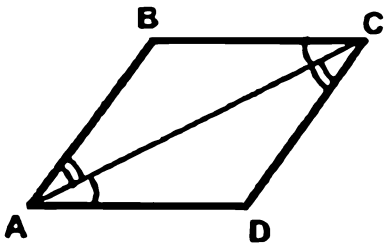
Довести:
$AB + CD = BC + AD$.

8 КЛАС

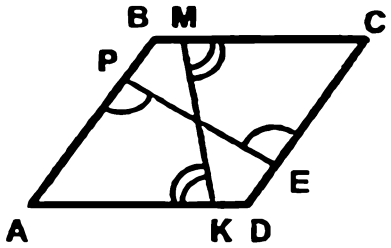
8.1. Визначення та ознаки паралелограма.
8.2. Визначення та ознаки паралелограма.
8.3. Властивості паралелограма.
8.4. Властивості паралелограма.
8.5. Властивості паралелограма.
8.6. Трапеція.
8.7. Теорема Фалеса.
8.8. Середня лінія трикутника і трапеції.
8.9. Нерівність трикутника.
8.10. Розв'язання прямокутних трикутників.
8.11. Теорема Піфагора. Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику.
8.12. Декартові координати на площині.
8.13. Декартові координати на площині.
8.14. Вектори на площині.
8.15. Вектори на площині.

Таблиця 8.1. **Визначення та ознаки паралелограма**
Довести, що $ABCD$ — паралелограм.

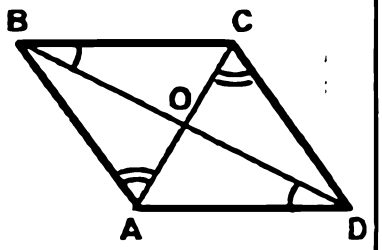
1



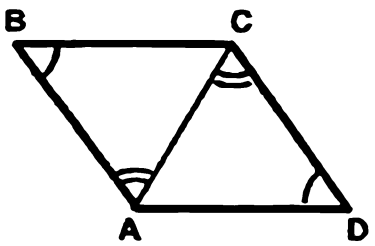
2



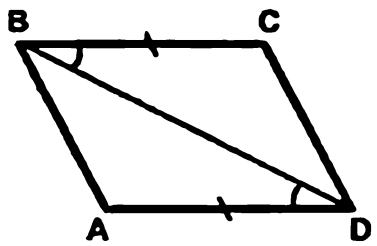
3



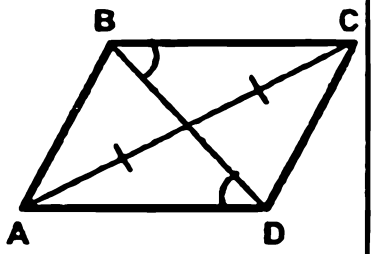
4



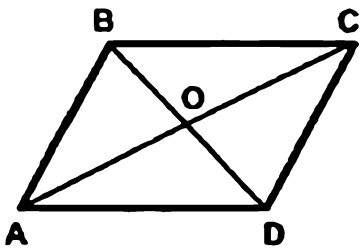
5



6

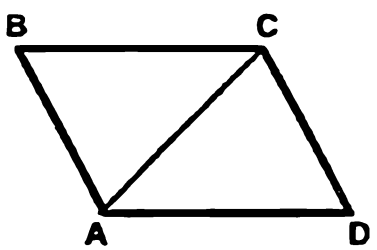


7



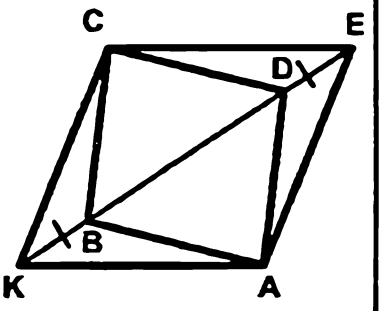
Дано: $\Delta AOB = \Delta COD$.

8



Дано: $\Delta ABC = \Delta CDA$.

9

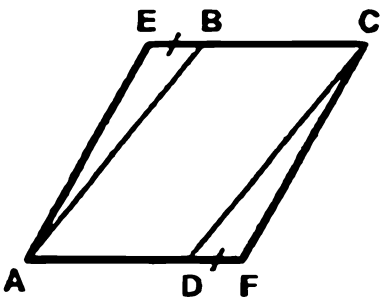


Дано: $AKCE$ — паралелограм.

Таблиця 8.2. Визначення та ознаки паралелограма

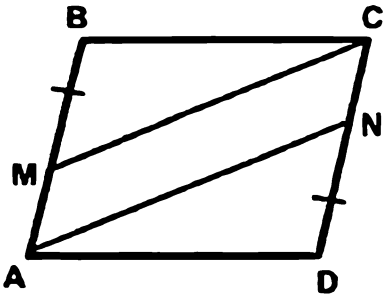
Довести, що *ABCD* — паралелограм.

1



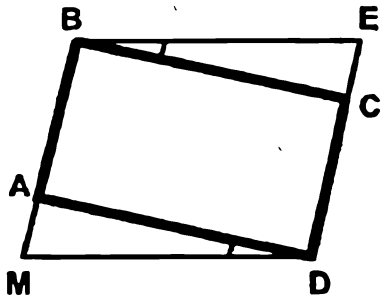
Дано: *AECF* — паралелограм.

2



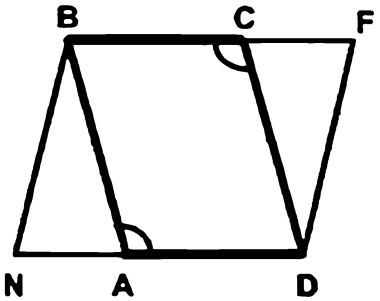
Дано: *AMCN* — паралелограм.

3



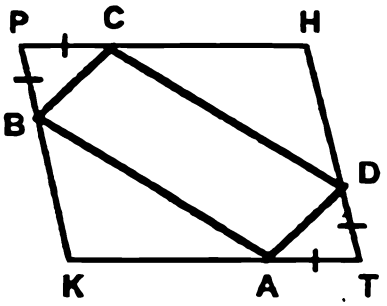
Дано: *MBED* — паралелограм.

4



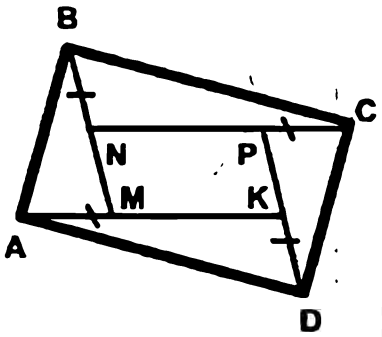
Дано: *NBFD* — паралелограм.

5



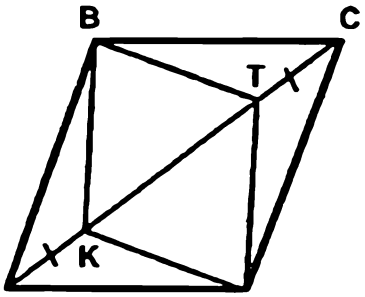
Дано: *KPHT* — паралелограм.

6



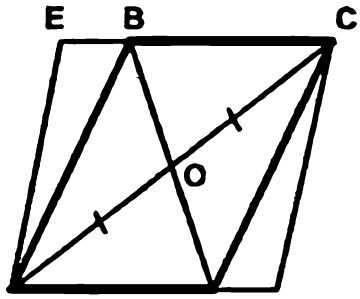
Дано: *MNPK* — паралелограм.

7



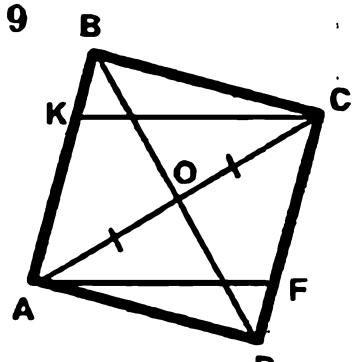
Дано: *KBTD* — паралелограм.

8



Дано: *AECF* — паралелограм.

9

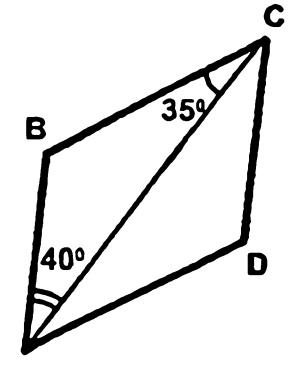


Дано: *AKCF* — паралелограм.

Таблиця 8.3. Властивості паралелограма

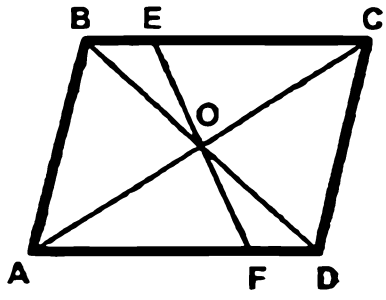
ABCD — паралелограм.

1



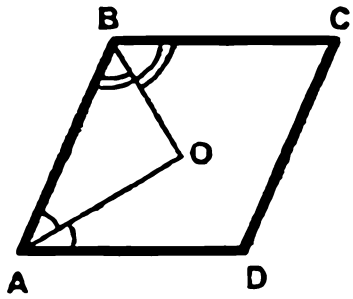
Знайти кути паралелограма *ABCD*.

2



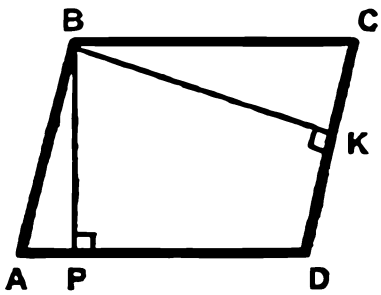
Довести: $OE = OF$.

3



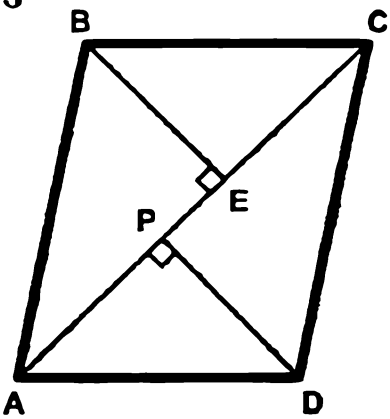
Довести: $\angle AOB = 90°$.

4



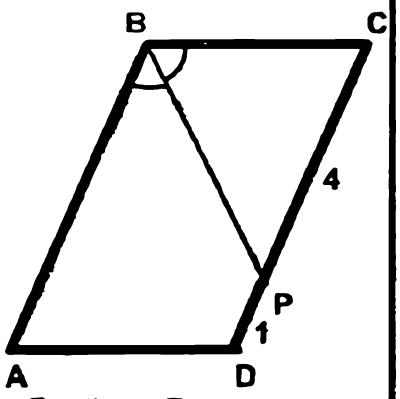
Довести:
$\angle PBK = \angle BCD$.

5



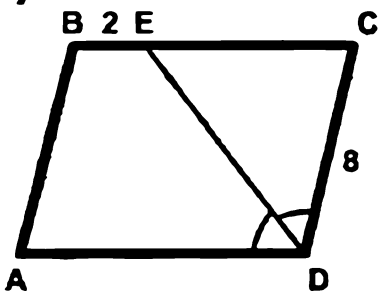
Довести: $AP = CE$.

6



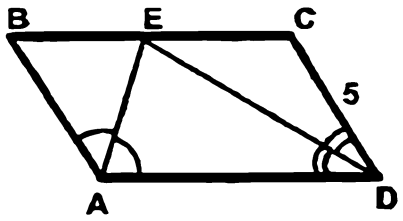
Знайти: P_{ABCD}.

7



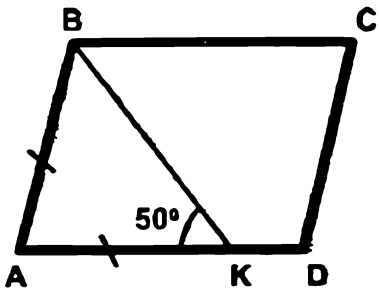
Знайти: P_{ABCD}.

8



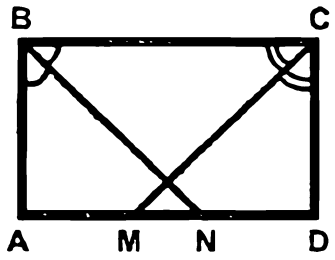
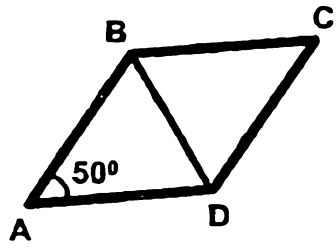
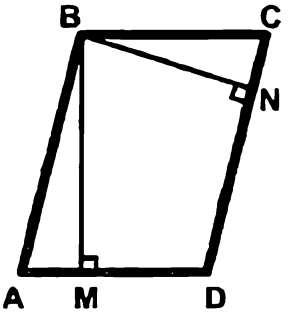
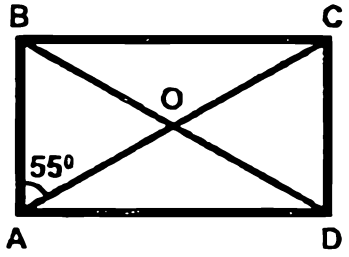
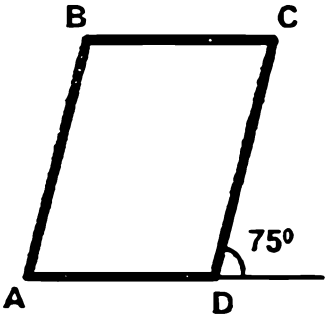
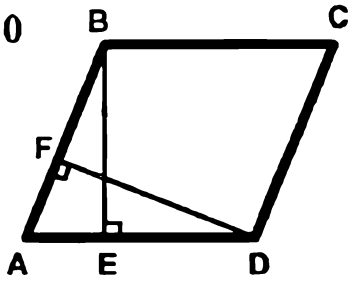
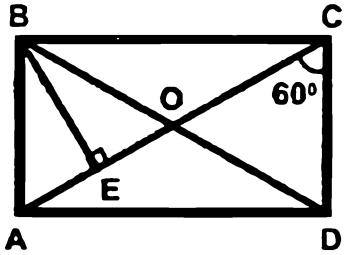
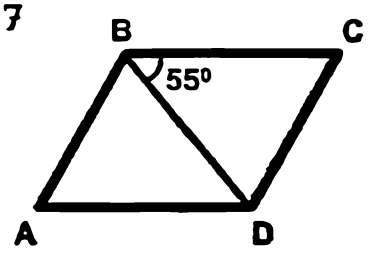
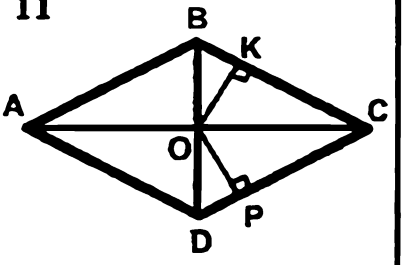
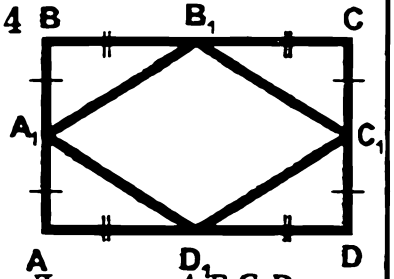
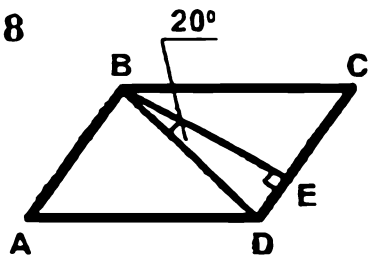
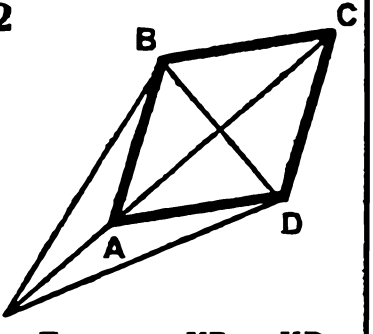
Знайти: P_{ABCD}.

9



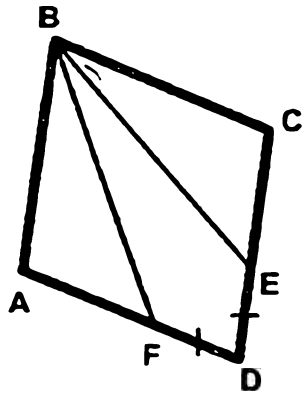
Знайти кути паралелограма *ABCD*.

Таблиця 8.4. Властивості паралелограма

ABCD — прямокутник	*ABCD* — ромб	
1  Довести: $BN = CM$.	5  Знайти: $\angle BDC$.	9  Довести: $BM = BN$.
2  Знайти: $\angle COD$, $\angle ACB$.	6  Знайти: $\angle ABC$.	10  Довести: $BE = DF$.
3  Дано: $OE = 4$. Знайти: AC.	7  Знайти: $\angle BAD$.	11  Довести: $OK = OP$.
4  Довести: $A_1B_1C_1D_1$ — ромб.	8  Знайти: $\angle BAD$.	12  Довести: $KB = KD$.

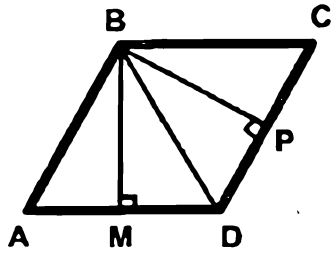
Таблиця 8.5. Властивості паралелограма

1



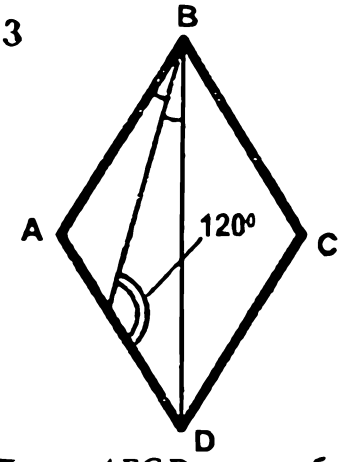
Дано: $ABCD$ — ромб.
Довести: $\angle ABF = \angle CBE$.

2



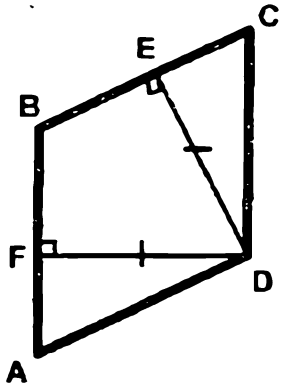
Дано: $ABCD$ — ромб.
Довести:
$\angle MBD = \angle DBP$.

3



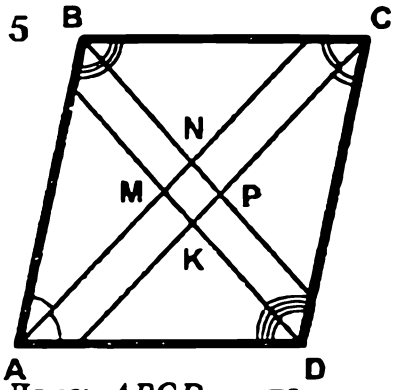
Дано: $ABCD$ — ромб.
Знайти кути $ABCD$.

4



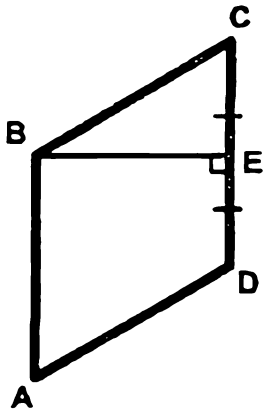
Дано: $ABCD$ — паралелограм.
Довести: $ABCD$ — ромб.

5



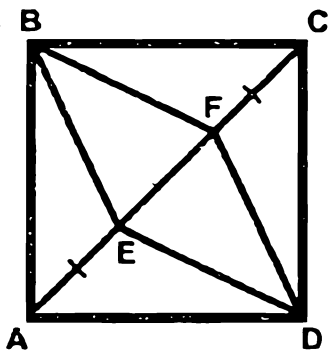
Дано: $ABCD$ — паралелограм.
Довести: $MNPK$ — прямокутник.

6



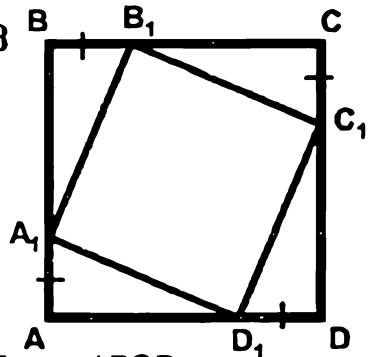
Дано: $ABCD$ — ромб.
Знайти: $\angle BAD$.

7



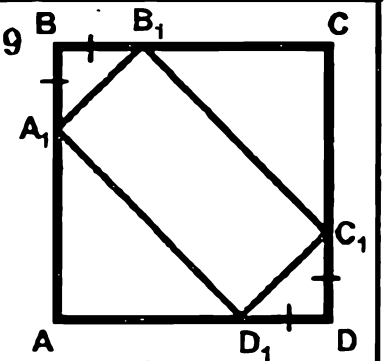
Дано: $ABCD$ — квадрат.
Довести: $BFDE$ — ромб.

8



Дано: $ABCD$ — квадрат.
Довести: $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

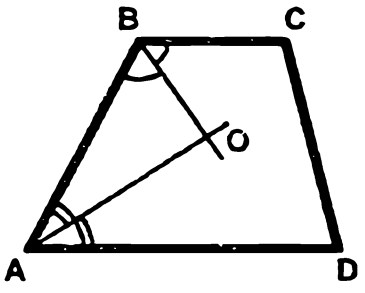
9



Дано: $ABCD$ — квадрат.
Довести: $A_1B_1C_1D_1$ — прямокутник.

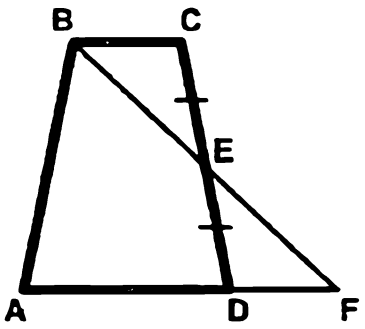
Таблиця 8.6. **Трапеція**
ABCD — трапеція.

1



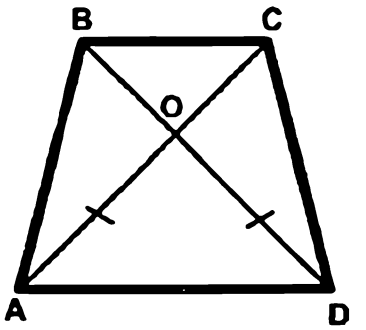
Довести: $\angle AOB = 90°$.

2



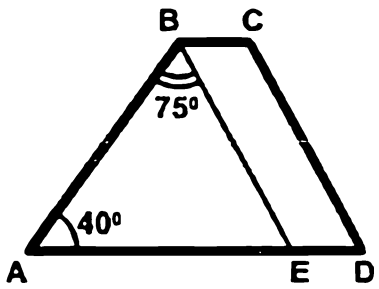
Довести: $BC = DF$.

3



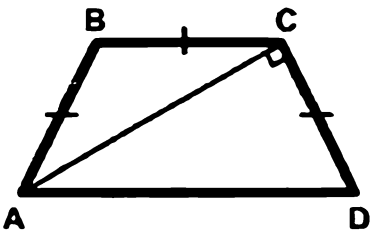
Довести: $AB = CD$.

4



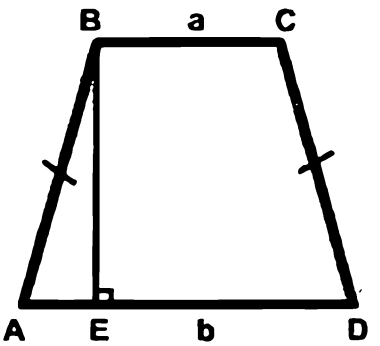
Дано: $BE \parallel CD$.
Знайти кути трапеції.

5



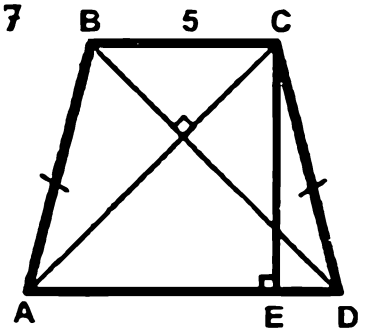
Знайти кути трапеції.

6



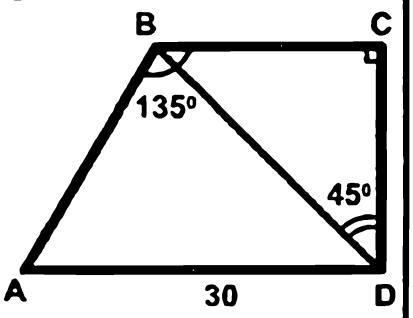
Дано: $AB = CD$.
Знайти AE і ED.

7



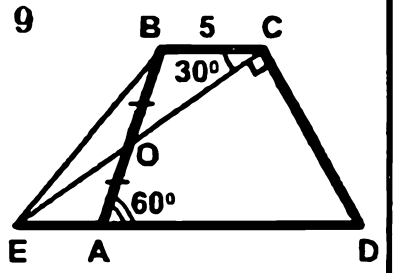
Дано: $AD = 15$.
Знайти: CE.

8



Знайти: BC.

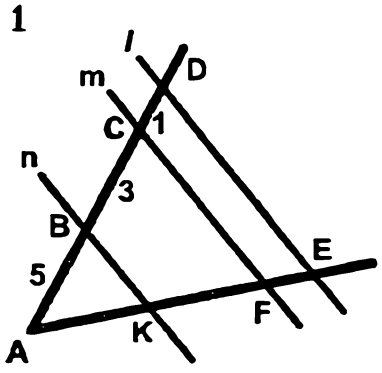
9



Дано: $AD = 15$.
Знайти: периметр трапеції.

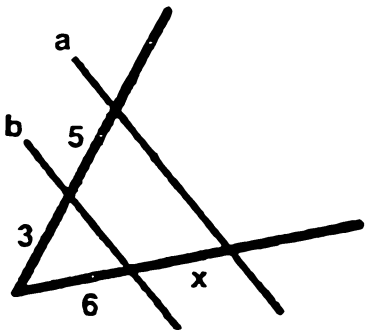
Таблиця 8.7. Теорема Фалеса
Теорема про пропорційні відрізки.

1



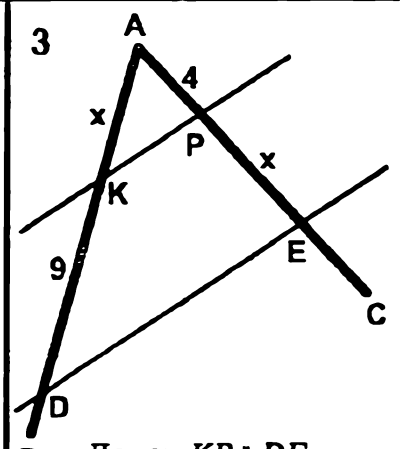
Дано: $l \parallel m \parallel n$.
Знайти: $AK : KF : FE$.

2



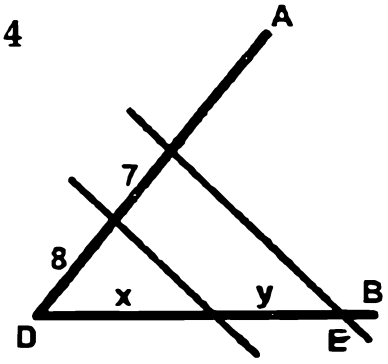
Дано: $a \parallel b$.
Знайти: x.

3



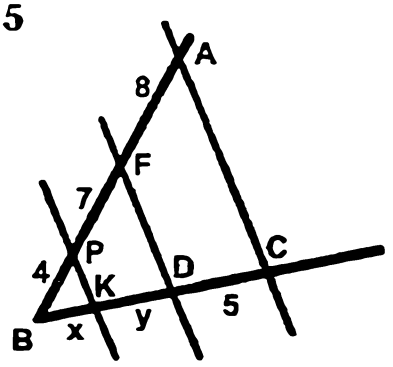
Дано: $KP \parallel DE$.
Знайти: x.

4



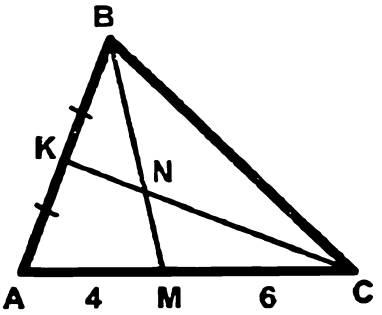
Дано: $DE = 30$.
Знайти: x і y.

5



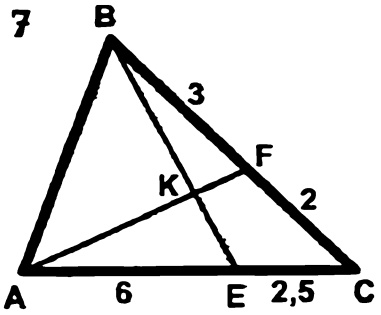
Дано: $AC \parallel FD \parallel PK$.
Знайти: x і y.

6



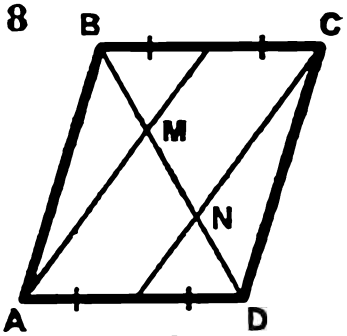
Знайти: $KN : NC$.

7



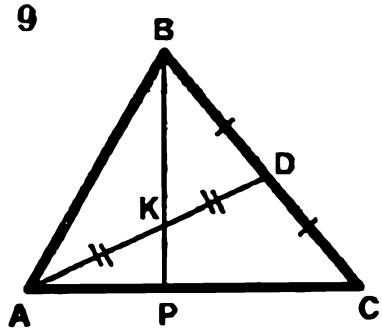
Знайти: $AK : KF$.

8



Дано: $ABCD$ — паралелограм.
Довести: $BM = MN = ND$.

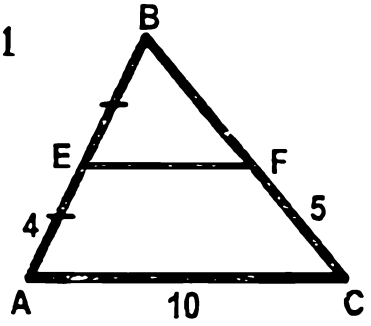
9



Знайти: $AP : PC$.

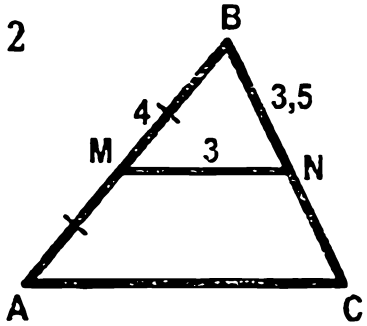
Таблица 8.8. Середня лінія трикутника і трапеції

1



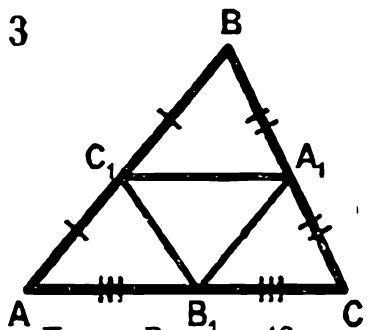
Дано: $EF \parallel AC$.
Знайти: P_{BEF}

2



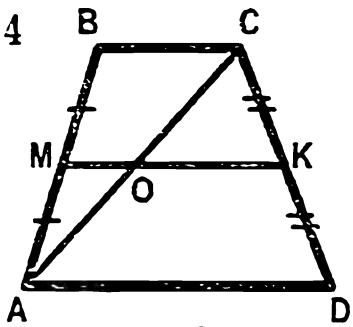
Дано: $MN \parallel AC$.
Знайти: P_{ABC}.

3



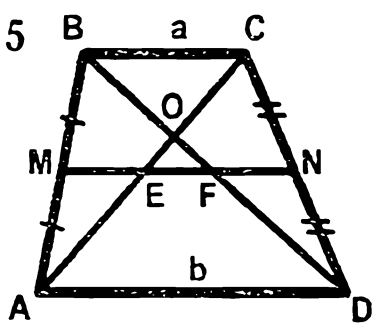
Дано: $P_{ABC} = 40$.
Знайти: $P_{A_1B_1C_1}$.

4



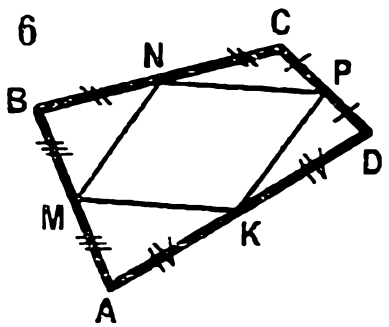
Дано: $ABCD$ — трапеція. Довести: $AO = OC$.

5



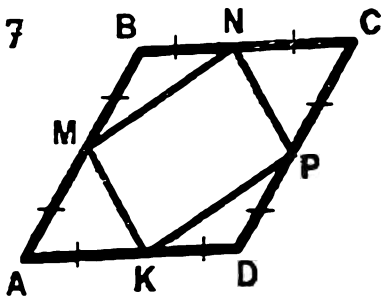
Дано: $ABCD$ — трапеція.
Знайти: EF, ME, FN.

6



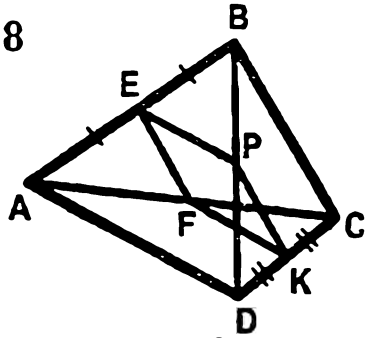
Довести: $MNPK$ — паралелограм.

7



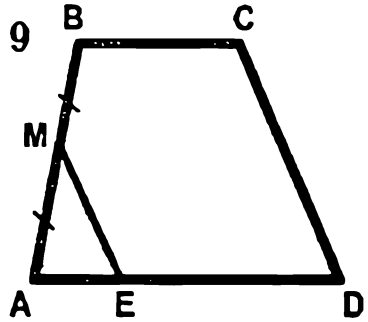
Дано: $ABCD$ — ромб.
Довести: $MNPK$ — прямокутник.

8



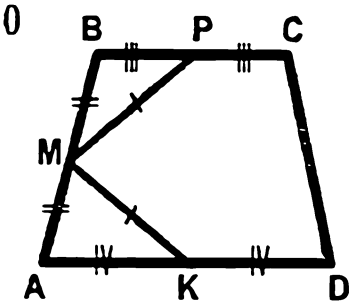
Дано: $AF = FC$, $BP = PD$.
Довести: EFKP — паралелограм.

9



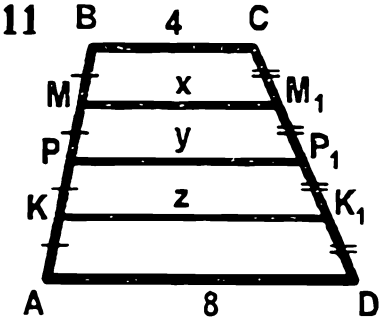
Дано: $ABCD$ — трапеція; $ME \parallel CD$.
Довести: $ME = CD/2$.

10



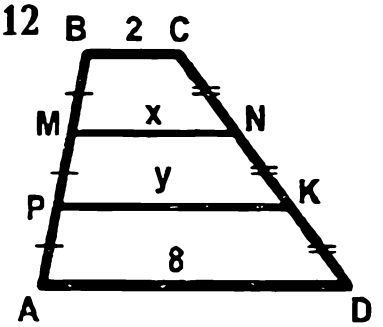
Дано: $ABCD$ — трапеція.
Довести: $AB = CD$.

11



Дано: $ABCD$ — трапеція.
Знайти: x, y, z.

12

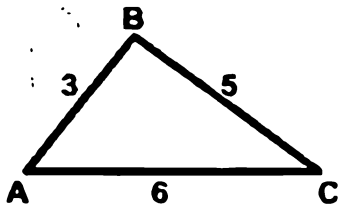


Дано: $ABCD$ — трапеція.
Знайти: x, y.

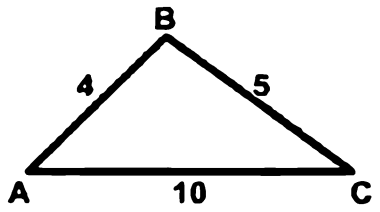
Таблиця 8.9. Нерівність трикутника

Чи існує трикутник ABC?

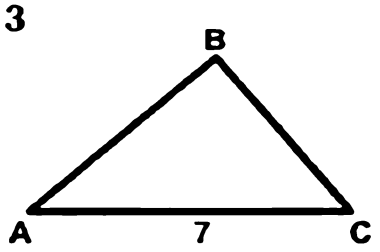
1



2



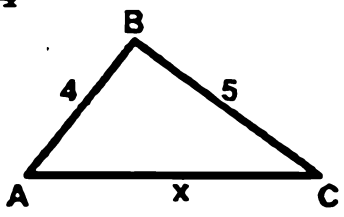
3



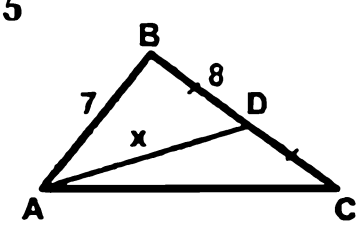
Дано: $AB - BC = 10$.

В яких межах змінюється x?

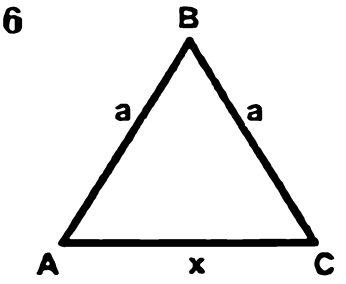
4



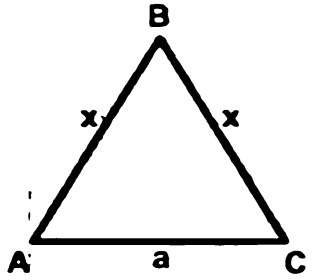
5



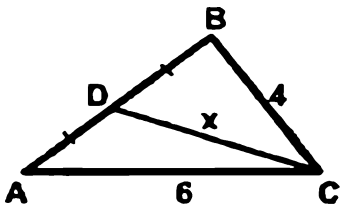
6



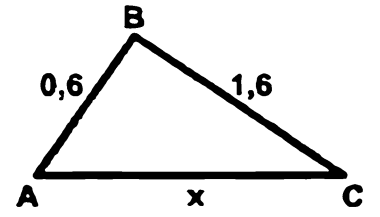
7



8



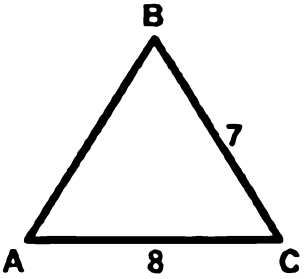
9



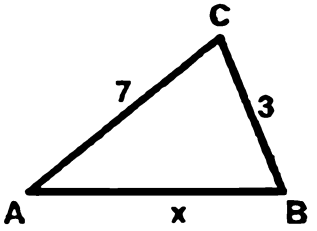
Дано: $x \in N$.

Дано: ΔABC — рівнобедрений. Знайти AB.

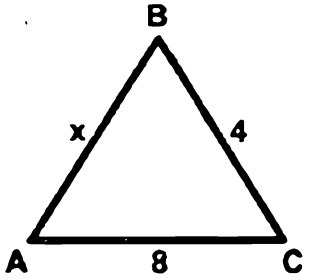
10



11



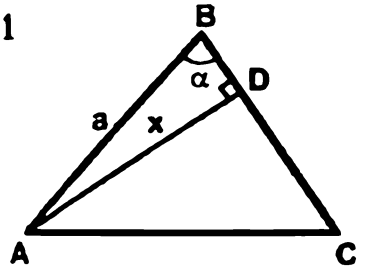
12



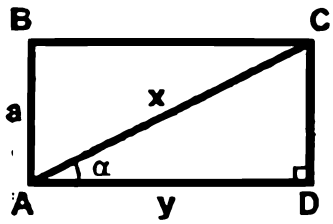
Таблиця 8.10. Розв'язання прямокутних трикутників

Знайти x і y.

1

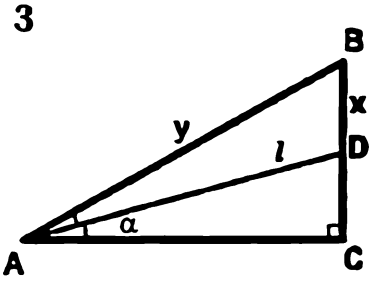


2

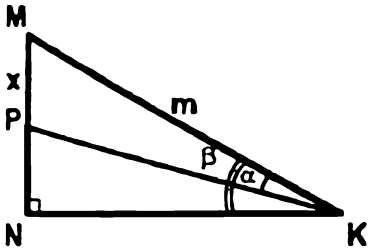


Дано: $ABCD$ — прямокутник.

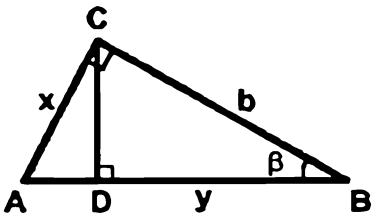
3



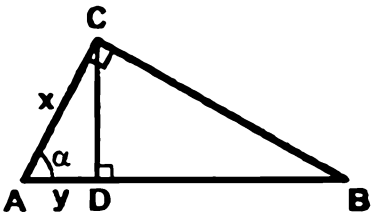
4



5

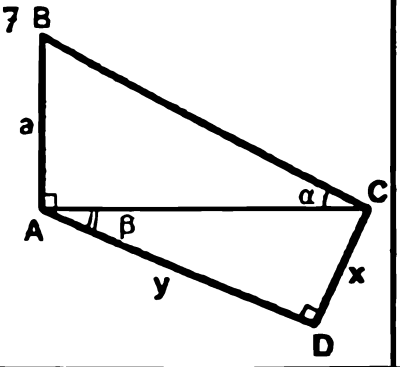


6

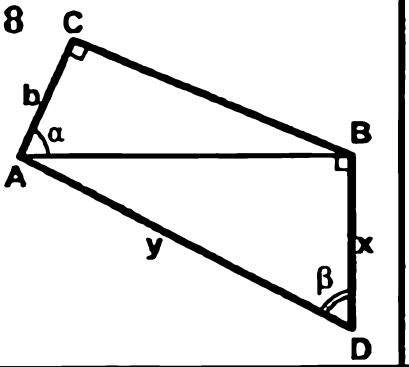


Дано: $AB = m$.

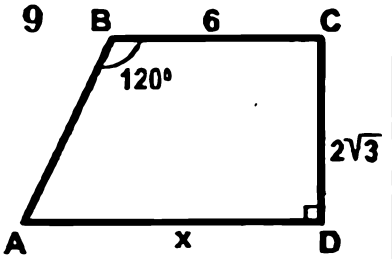
7



8

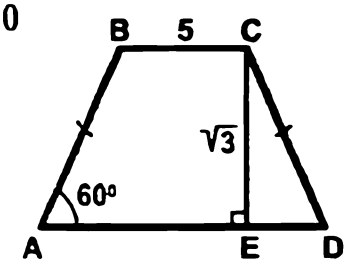


9



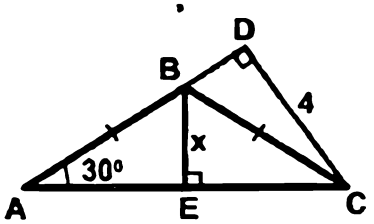
Дано: $ABCD$ — трапеція.

10

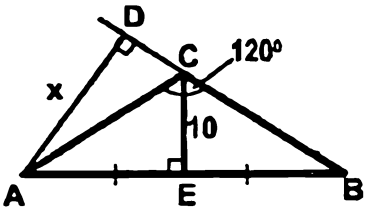


Дано: $ABCD$ — трапеція. $AD = x$.

11



12

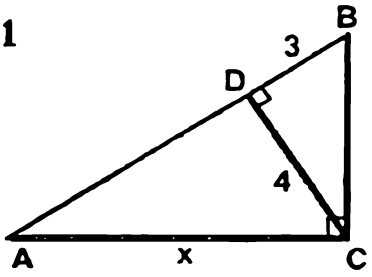


Дано: $BD = y$.

Таблиця 8.11. Теорема Піфагора. Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику

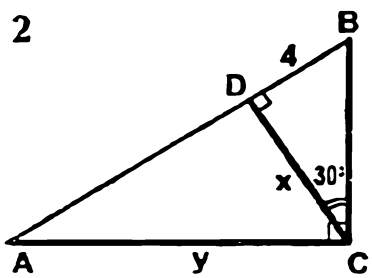
Знайти x і y.

1

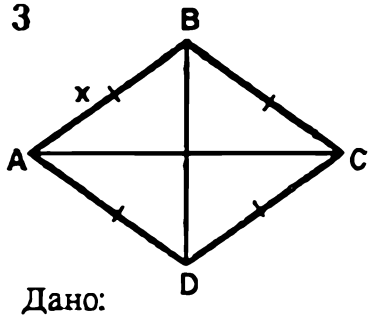


Дано: $AB = 13$.
Знайти помилку.

2

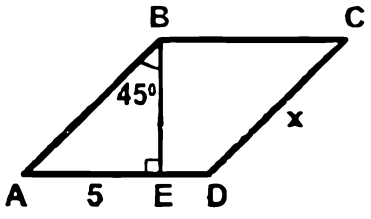


3



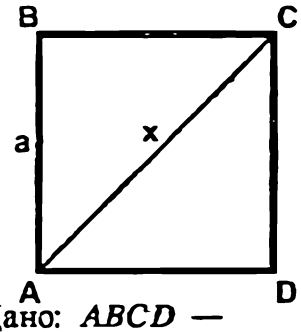
Дано:
$AC = 8$, $BD = 6$.

4



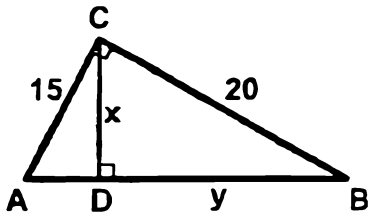
Дано: $ABCD$ — паралелограм.

5

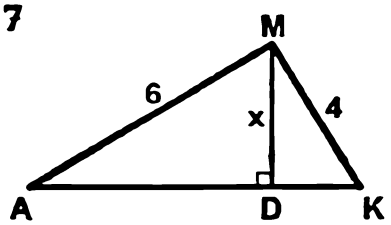


Дано: $ABCD$ — квадрат.

6

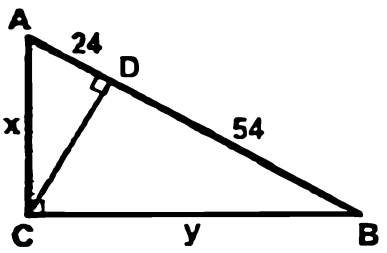


7

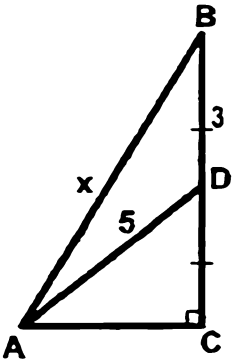


Дано: $AK = 8$.

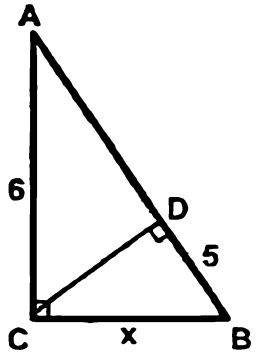
8



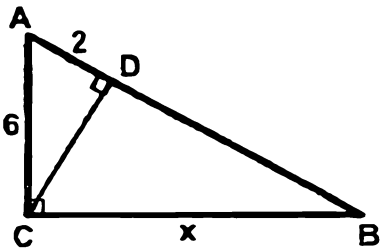
9



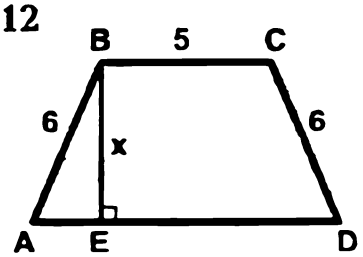
10



11 Дано: $AB = y$.



12

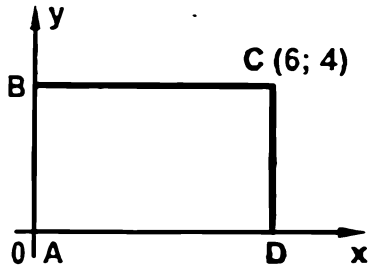


Дано: $ABCD$ — трапеція; $AD = 9$.

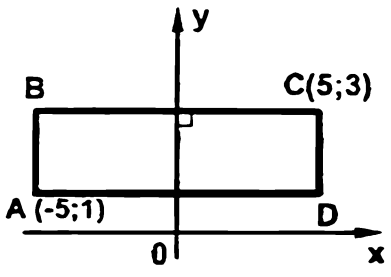
Таблиця 8.12. Декартові координати на площині

Визначити координати вершин прямокутника *ABCD*:

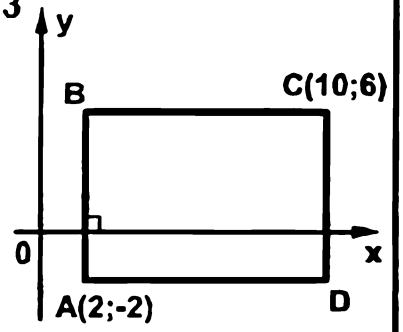
1



2

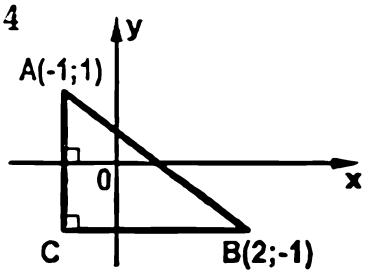


3

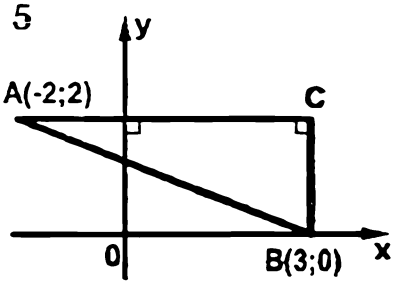


Знайти координати точки *C*:

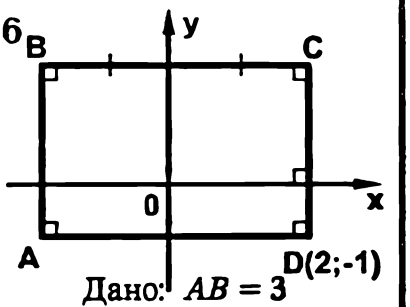
4



5



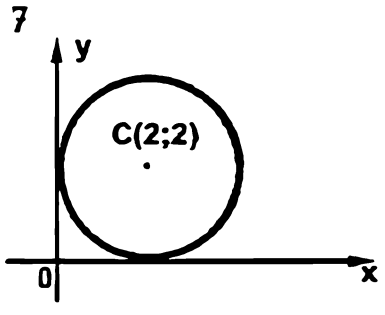
6



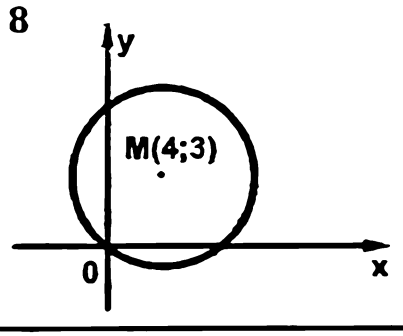
Дано: $AB = 3$

Записати рівняння кола:

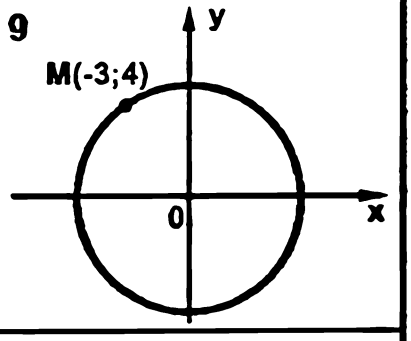
7



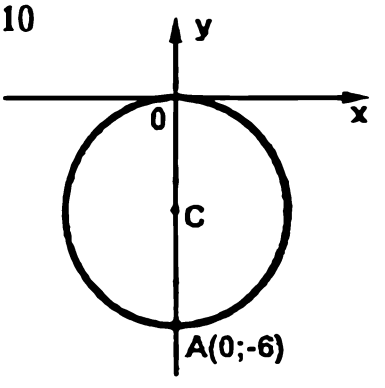
8



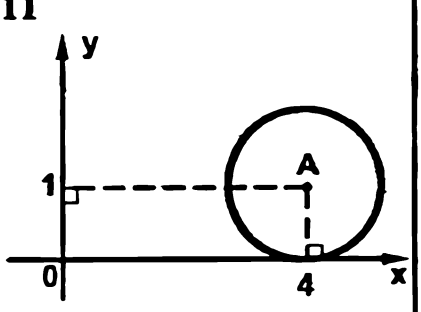
9



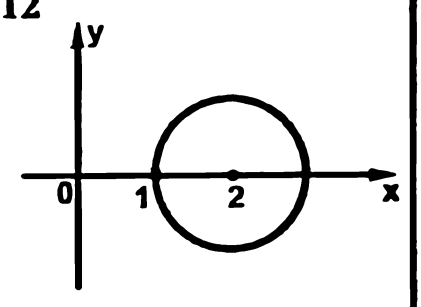
10



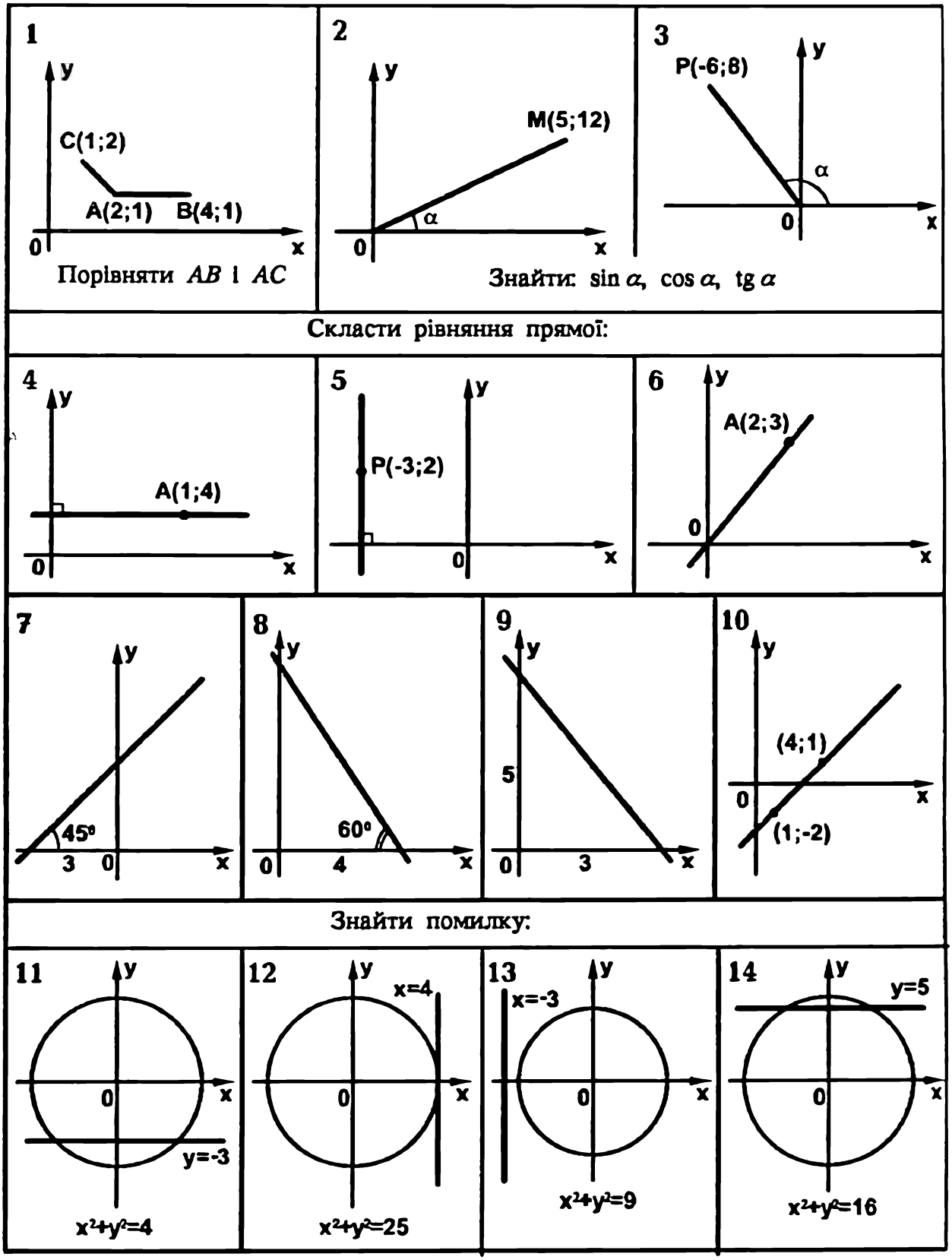
11



12

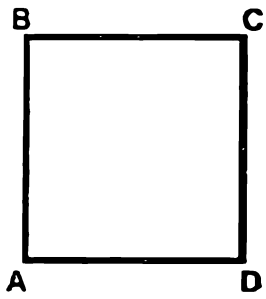


Таблиця 8.13. Декартові координати на площині



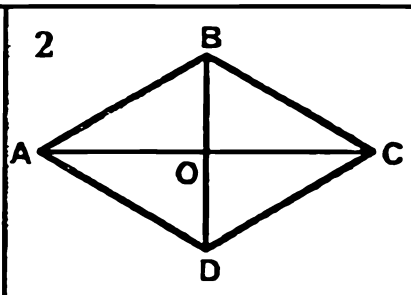
Таблиця 8.14. Вектори на площині

1



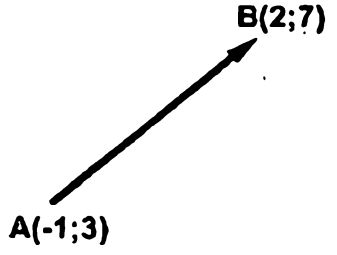
Дано: $ABCD$ — квадрат. Вказати рівні вектори.

2



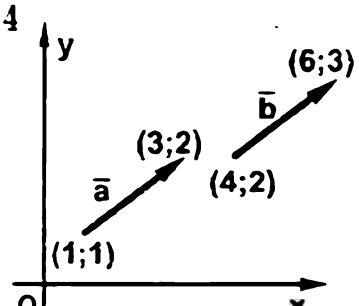
Дано: $ABCD$ — ромб. Вказати рівні вектори.

3



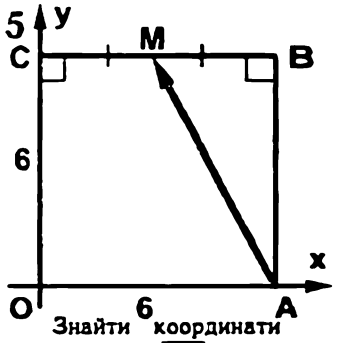
Знайти: $|\overline{AB}|$.

4



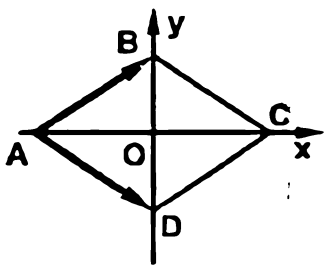
Чи рівні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$?

5



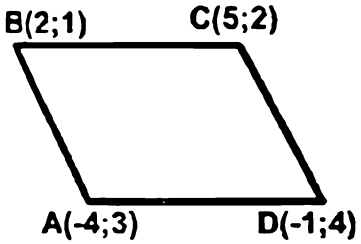
Знайти координати вектора $\overline{AM}$.

6



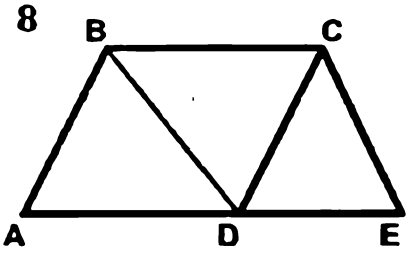
Дано: $ABCD$ — ромб, $AC = 16$; $BD = 10$. Знайти координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$.

7



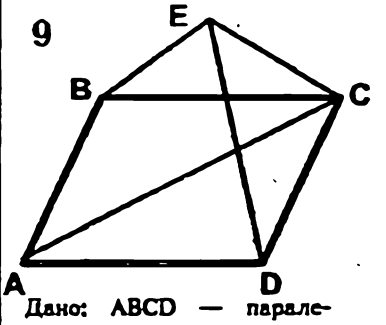
Довести: $ABCD$ — паралелограм.

8



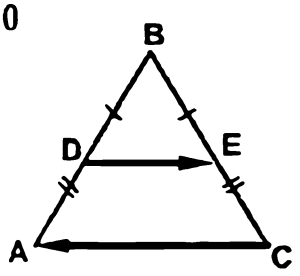
Дано: ABCD — паралелограм. Довести: $\overline{EC}+\overline{CB}+\overline{BD}=\overline{EC}+\overline{BA}$.

9



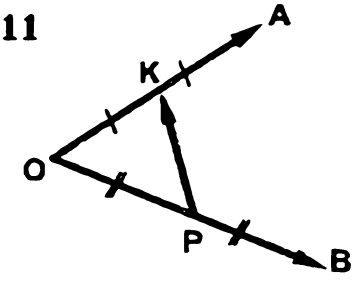
Дано: ABCD — паралелограм. Довести: $\overline{BE}+\overline{ED}+\overline{DC}=\overline{CD}+\overline{AC}$.

10



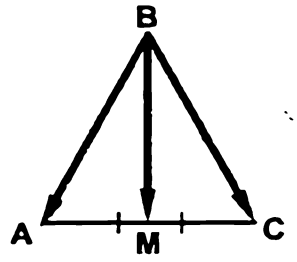
Выразить $\overline{DE}$ через $\overline{CA}$.

11



Виразити $\overline{PK}$ через $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$.

12



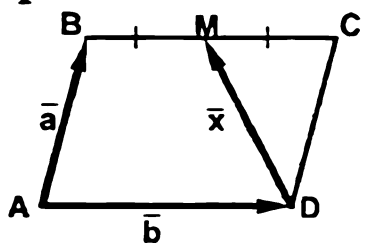
Довести:

$$\overline{BM}=\frac{1}{2}(\overline{BA}+\overline{BC}).$$

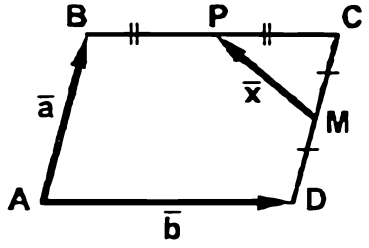
Таблиця 8.15. Вектори на площині

Виразити вектор x через вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ($ABCD$ — паралелограм).

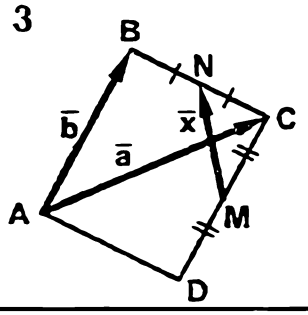
1



2

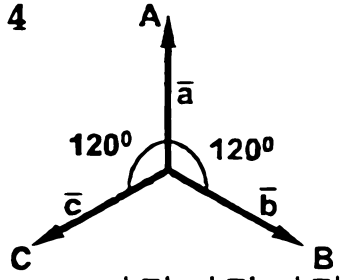


3



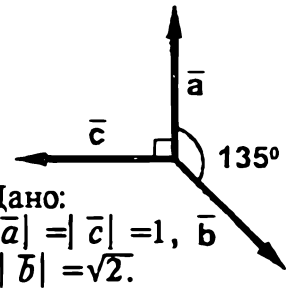
Довести: $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$.

4



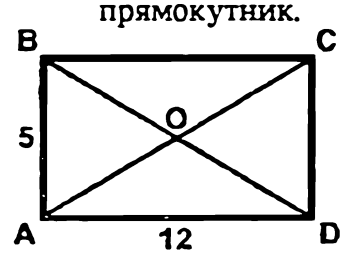
Дано: $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|$.

5



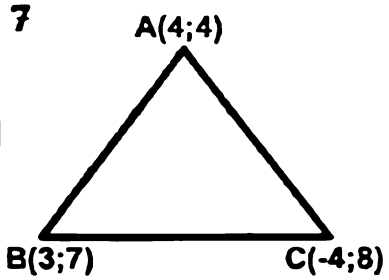
Дано:
$|\bar{a}|=|\bar{c}|=1$, $\bar{b}$
$|\bar{b}|=\sqrt{2}$.

6 Дано: ABCD — прямокутник.



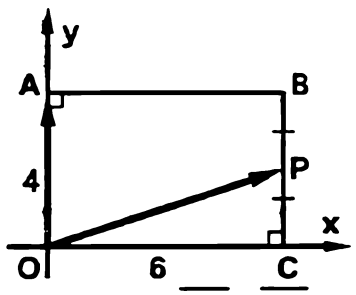
Знайти:
$|\overline{AB}+\overline{AD}-\overline{DC}-\overline{OD}|$.

7



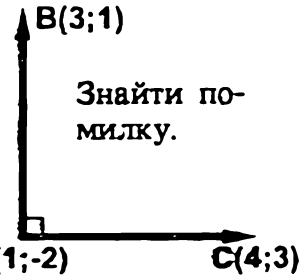
Знайти: $\cos\angle B$.

8



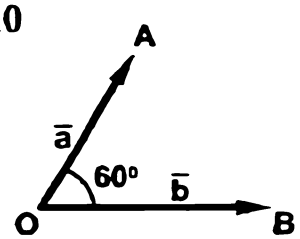
Знайти: $\overline{OA}\cdot\overline{OP}$.

9



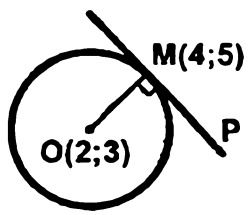
Знайти помилку.

10



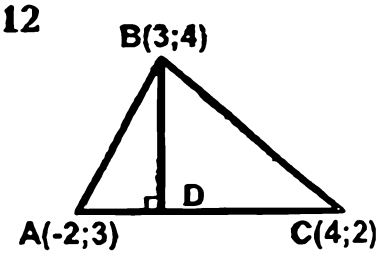
$|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$.
Знайти: $|\bar{a}+\bar{b}|$, $|\bar{a}-\bar{b}|$.

11



Записати рівняння прямої MP, дотичної до кола.

12



Записати рівняння висоти BD.

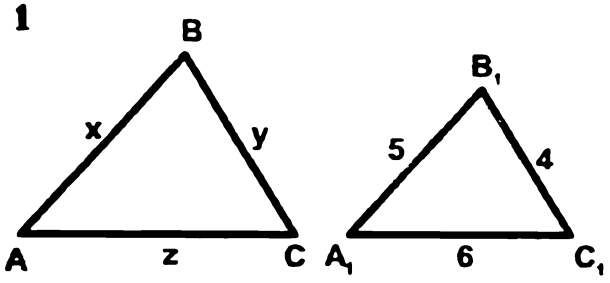
9 КЛАС

9.1. Подібні трикутники.
9.2. Перша ознака подібності трикутників.
9.3. Друга і третя ознаки подібності трикутників.
9.4. Вписані кути.
9.5. Вписані кути. Кут між дотичною і хордою.
9.6. Розв'язування трикутників.
9.7. Розв'язування трикутників.
9.8. Правильні многокутники.
9.9. Площа трикутника.
9.10. Площа чотирикутника.
9.11. Площа чотирикутника.
9.12. Площі фігур.
9.13. Площі фігур.
9.14. Площа круга та його частин.

Таблиця 9.1. Подібні трикутники

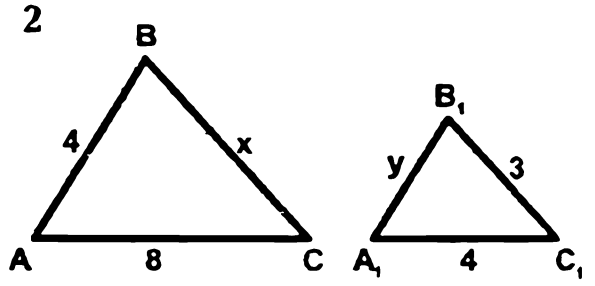
Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Знайти x, y, z:

1

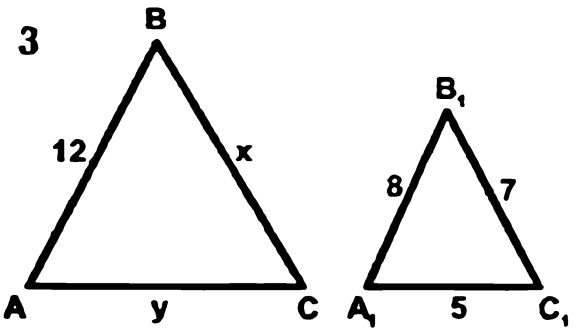


Дано: $\frac{BC}{B_1C_1} = 3$.

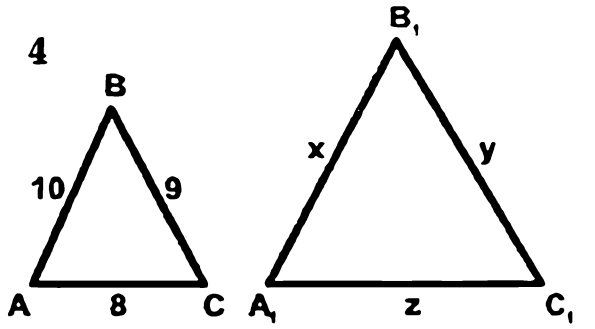
2



3

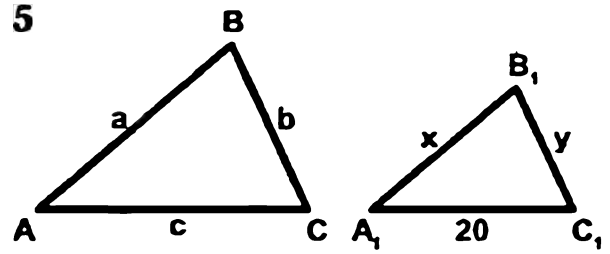


4



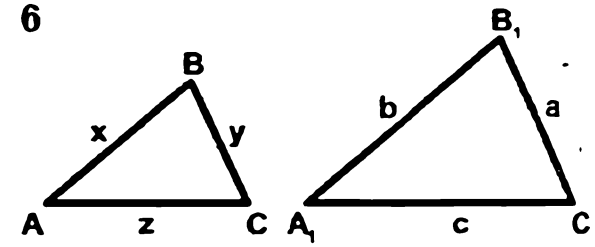
Дано: $P_{A_1B_1C_1} = 54$.

5



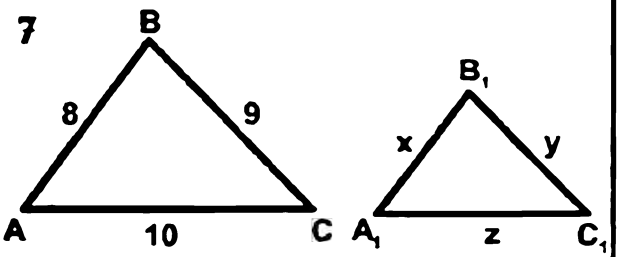
Дано: $a : b : c = 4 : 3 : 5$.

6



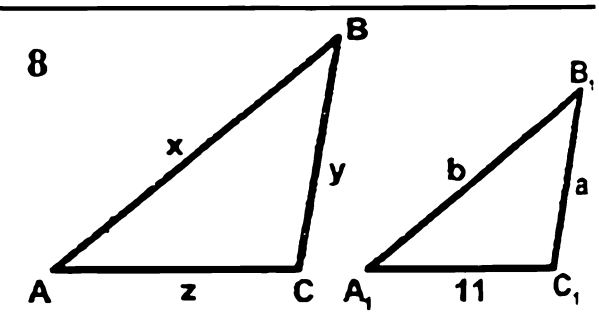
Дано: $a : b : c = 5 : 6 : 7$. $P_{ABC} = 108$.

7



Дано: $P_{A_1B_1C_1} = 9$.

8

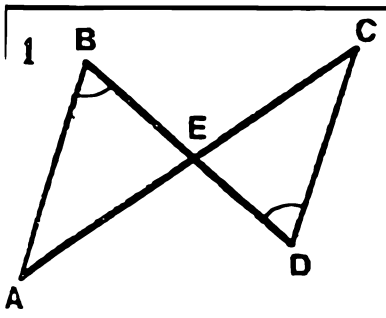


$P_{ABC} = 39$, $P_{A_1B_1C_1} = 26$, $a : b = 2 : 3$.

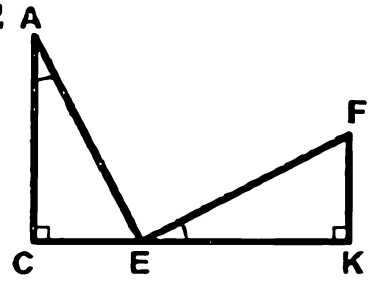
Таблиця 9.2. Перша ознака подібності трикутників

Знайти подібні трикутники, довести їх подібність.

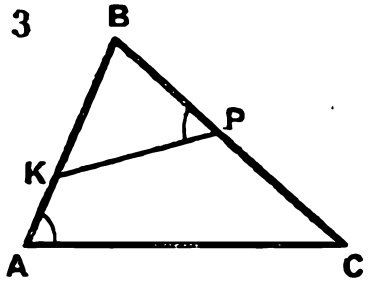
1



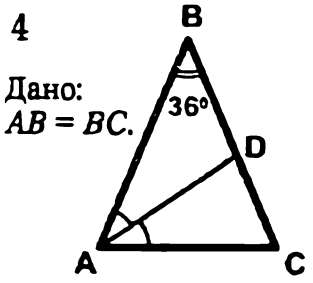
2



3

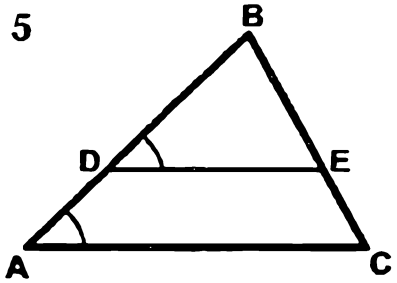


4

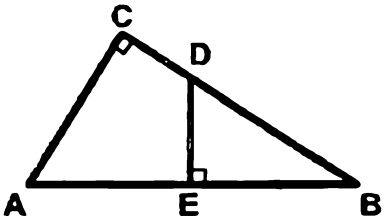


Дано: $AB = BC$.

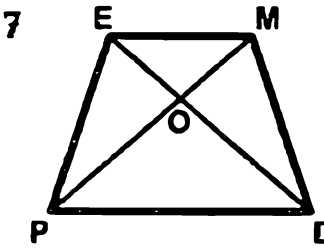
5



6

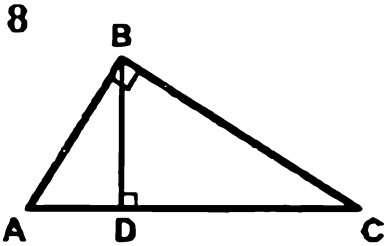


7

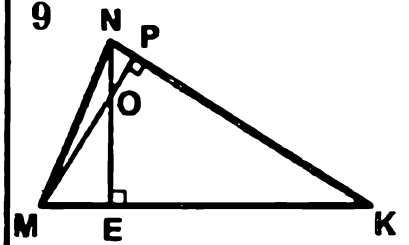


Дано: $ABCD$ — трапеція.

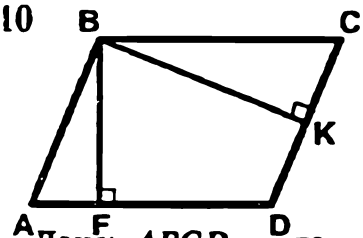
8



9

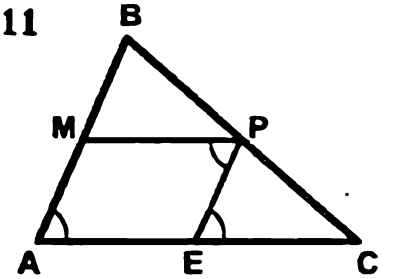


10

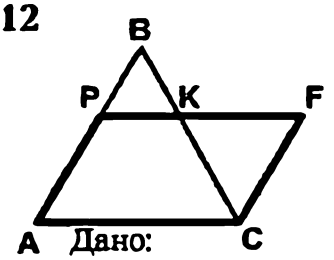


Дано: $ABCD$ — паралелограм.

11

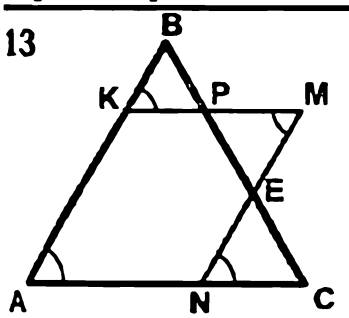


12

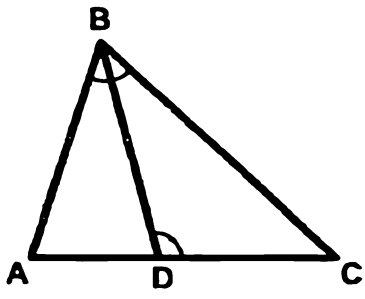


Дано: $APFC$ — паралелограм.

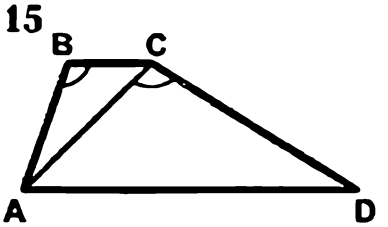
13



14



15

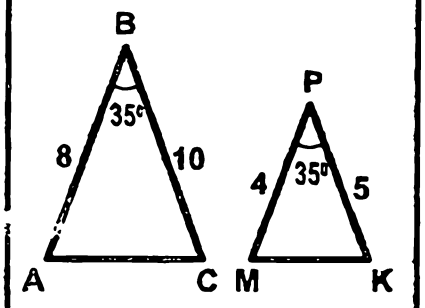


Дано: $ABCD$ — трапеція.

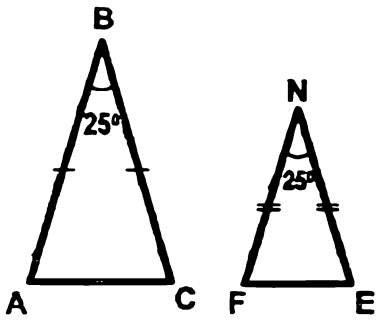
Таблиця 9.3. Друга і третя ознаки подібності трикутників

Знайти подібні трикутники, довести їх подібність.

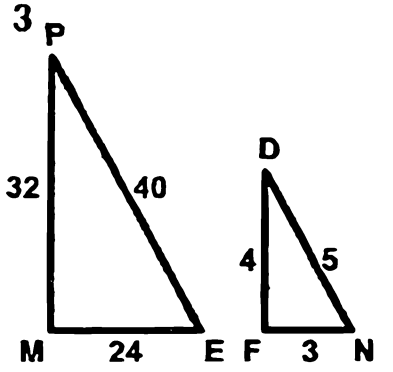
1



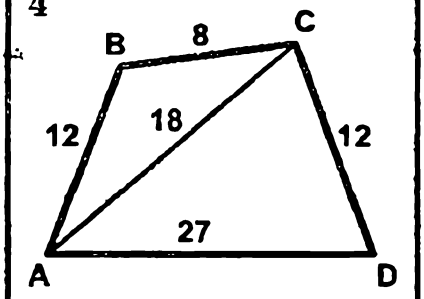
2



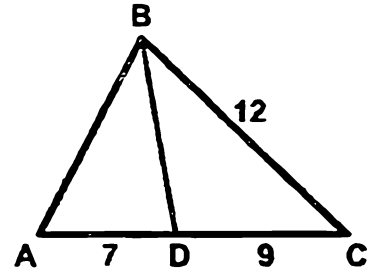
3



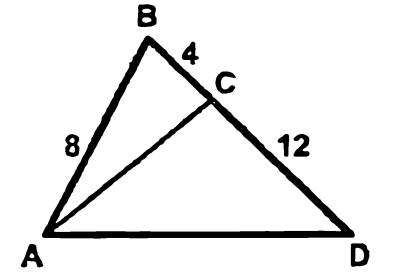
4



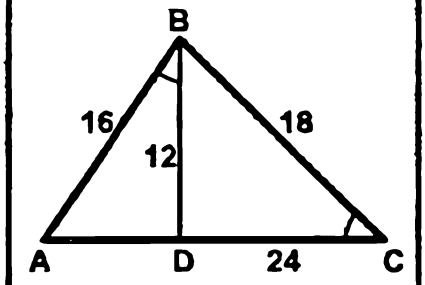
5



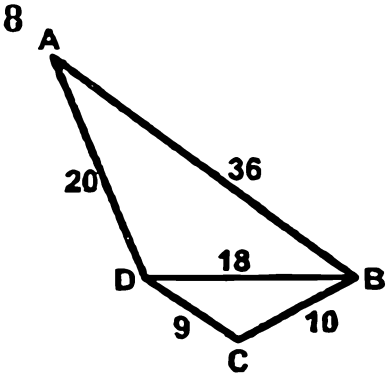
6



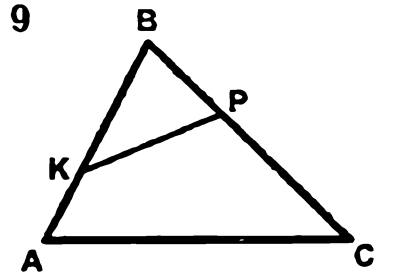
7



8



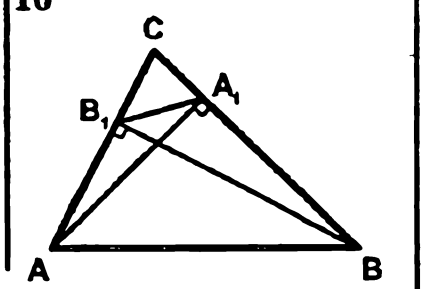
9



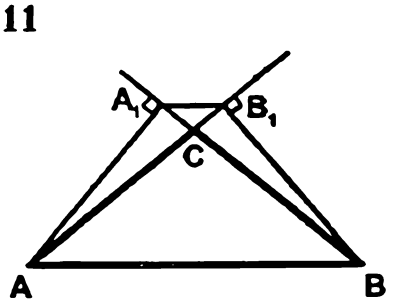
Дано:
$AB \cdot BK = CB \cdot BP$.

Довести, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ і знайти коефіцієнти подібності:

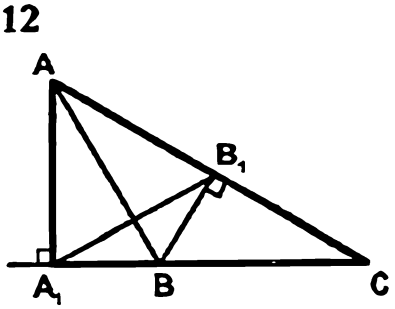
10



11

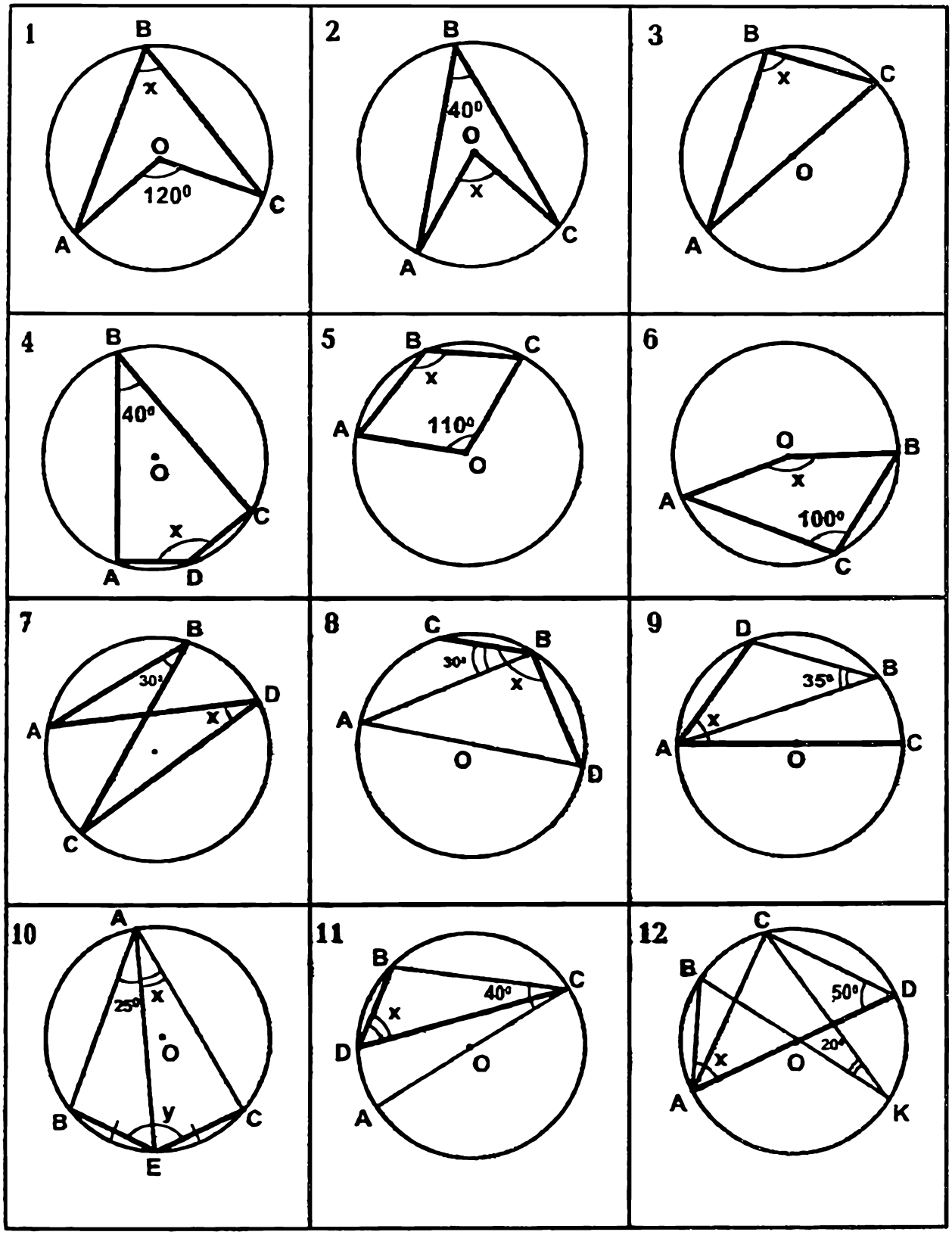


12



Таблиця 9.4. **Вписані кути**

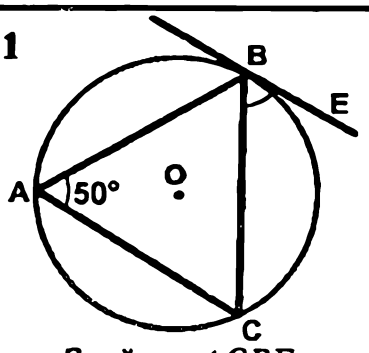
Знайти x, y (O — центр кола).



Таблиця 9.5. Вписані кути. Кут між дотичною і хордою

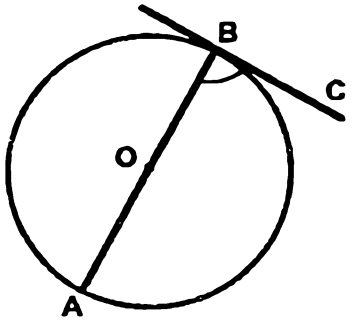
O — центр кола, B — точка дотику.

1



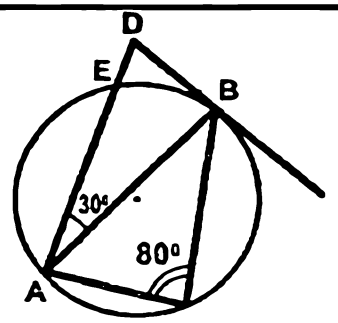
Знайти: $\angle CBE$.

2



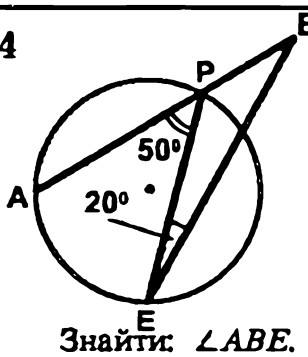
Знайти: $\angle ABC$.

3



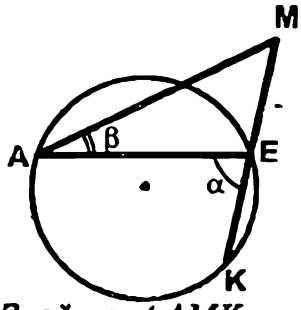
Знайти: $\angle ADB$.

4



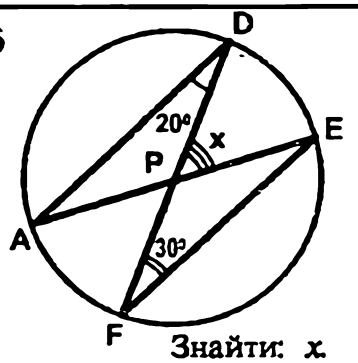
Знайти: $\angle ABE$.

5



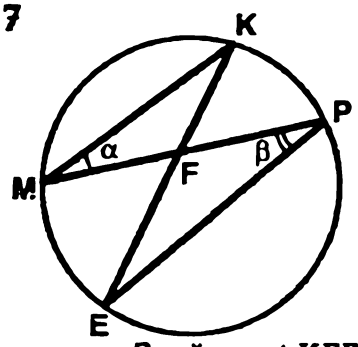
Знайти: $\angle AMK$.

6



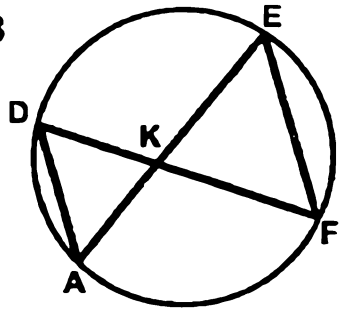
Знайти: x.

7



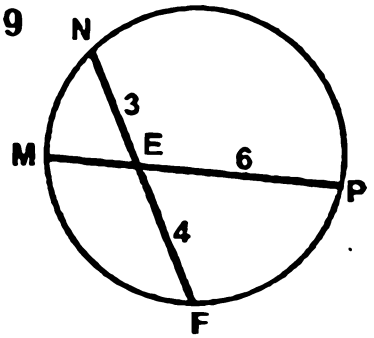
Знайти: $\angle KFP$.

8



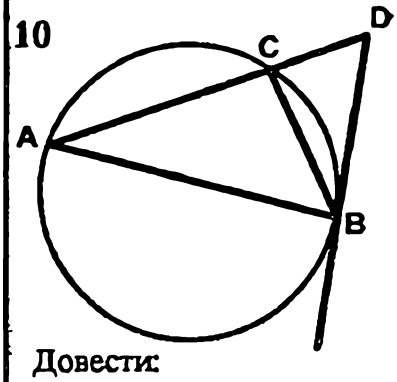
Довести: $\Delta ADK \sim \Delta FEK$,
$AK \cdot KE = DK \cdot KF$.

9



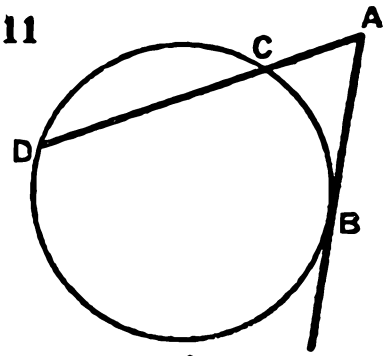
Знайти: ME.

10



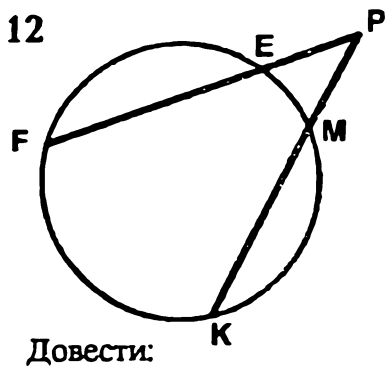
Довести:
$\Delta ABD \sim \Delta BCD$.

11



Довести: $AB^2 = AD \cdot AC$.

12

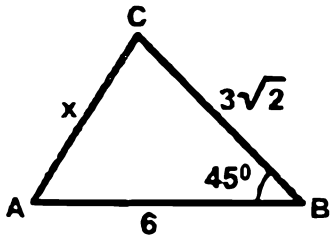


Довести:
$PE \cdot PF = PM \cdot PK$.

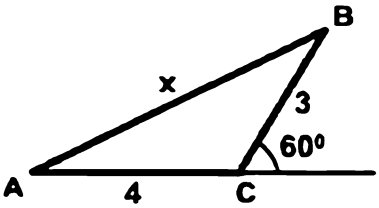
Таблиця 9.6. Розв'язування трикутників

Знайти x:

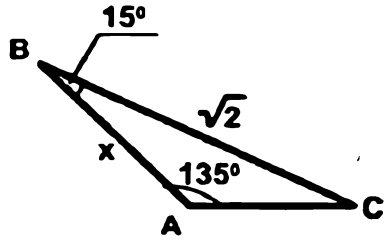
1



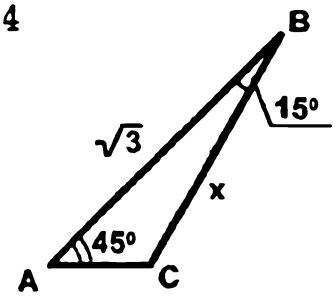
2



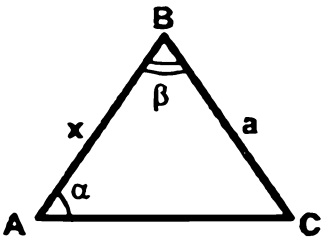
3



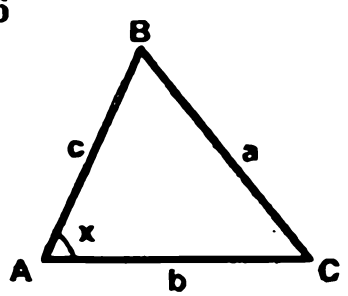
4



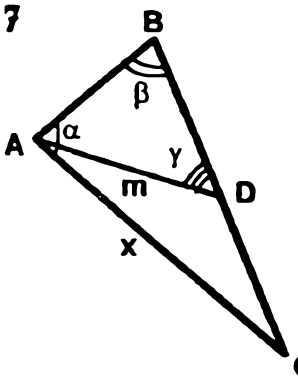
5



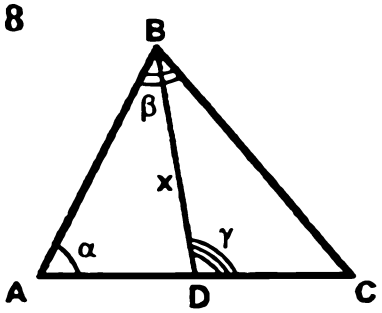
6



7

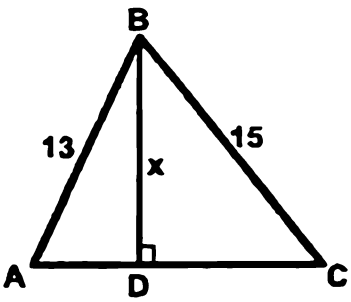


8



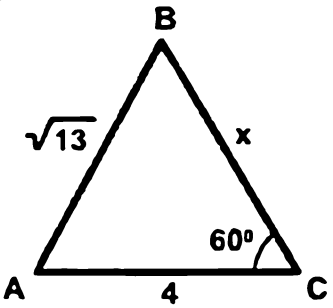
Дано: $AC = b$.

9

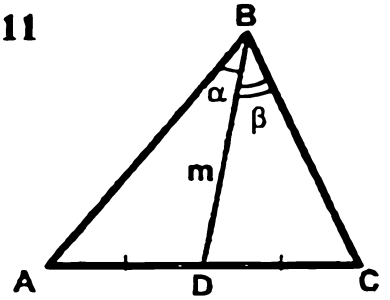


Дано: $AC = 14$.

10

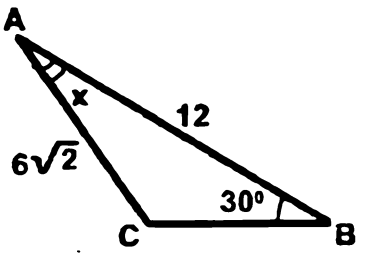


11



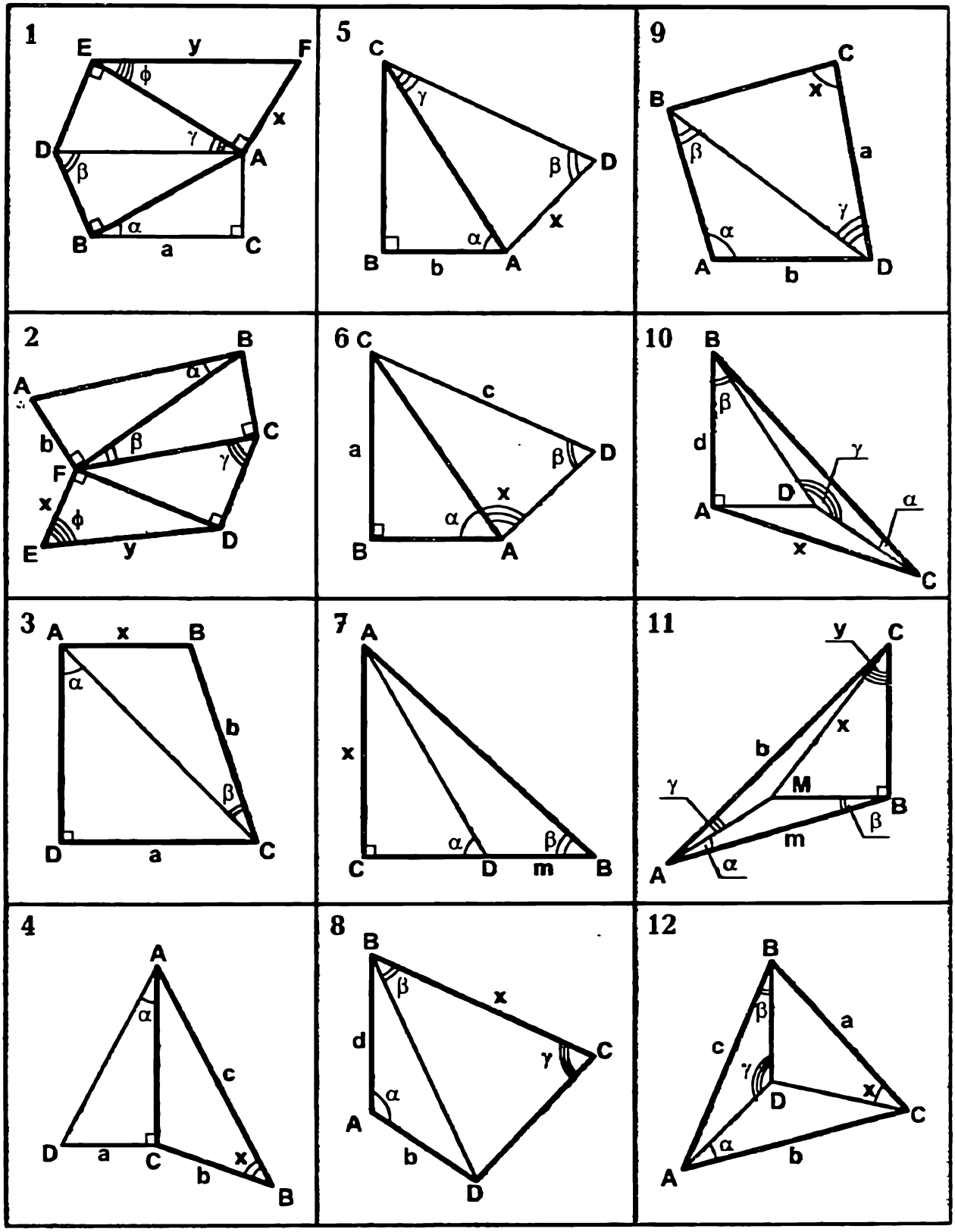
Знайти: AC.

12



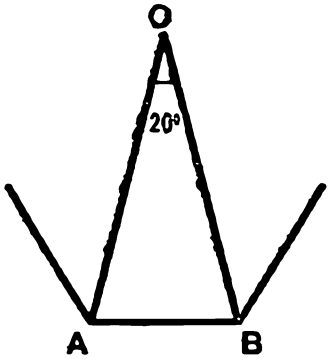
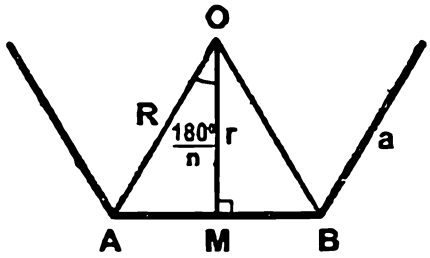
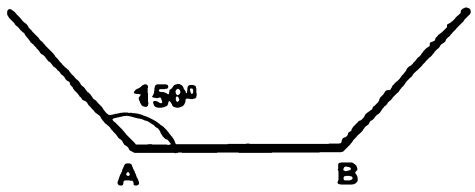
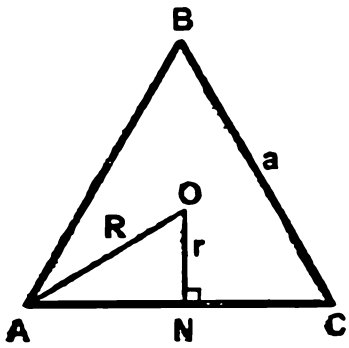
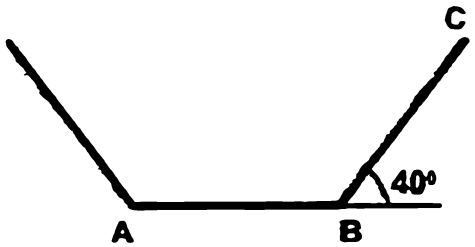
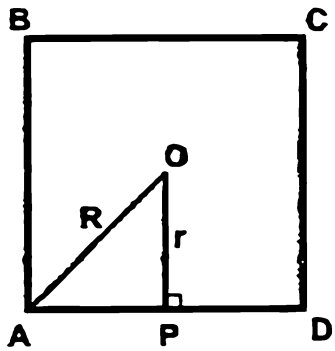
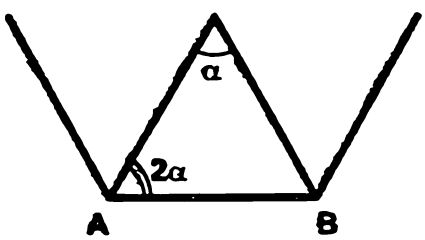
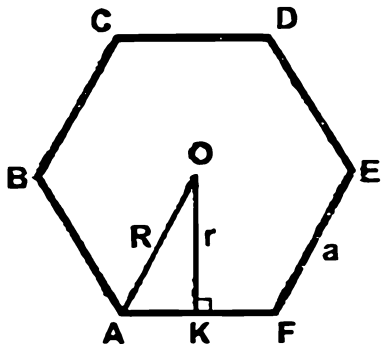
Таблиця 9.7. **Розв'язування трикутників**

Знайти x і y:



Таблиця 9.8. **Правильні многокутники**

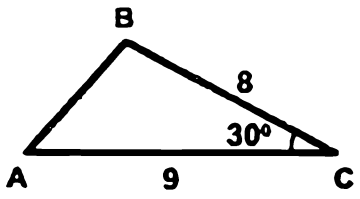
a — сторона многокутника, R (r) — радіус описаного (вписаного) кола, O — центр многокутника.

Знайти кількість сторін многокутника.	Знаючи один з елементів (a, R або r), знайти два інших.
1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

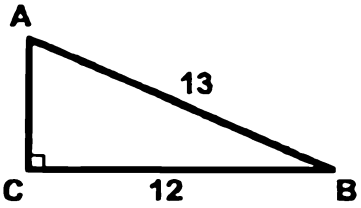
Таблиця 9.9. Площа трикутника

O — центр кола. Знайти площу ΔABC:

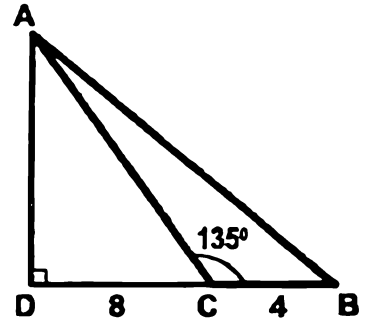
1



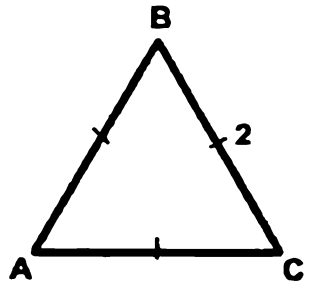
2



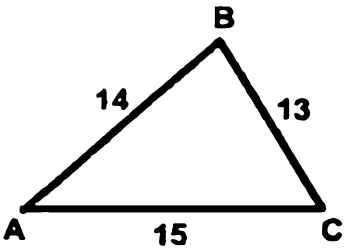
3



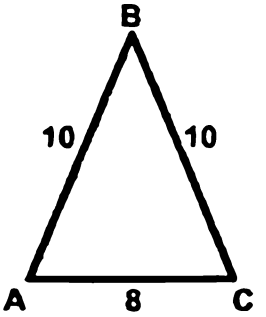
4



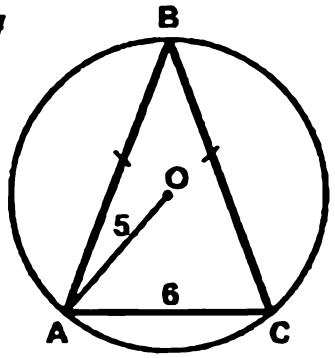
5



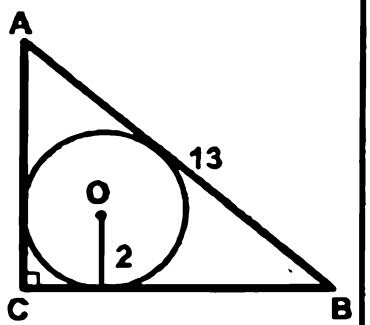
6



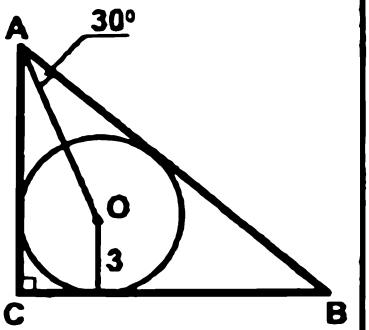
7



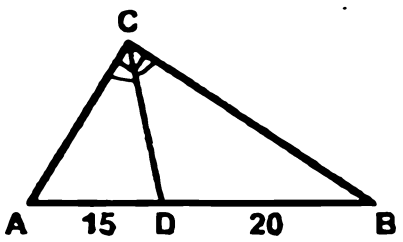
8



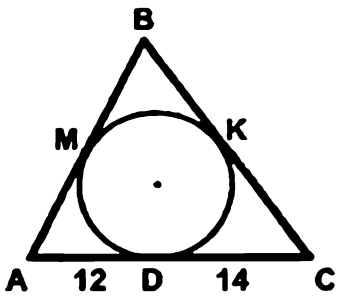
9



10

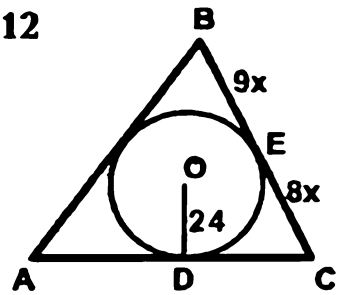


11



Дано: $P = 84$.

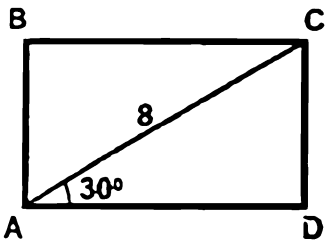
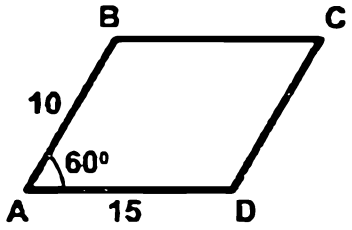
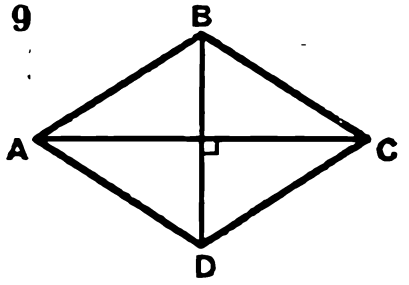
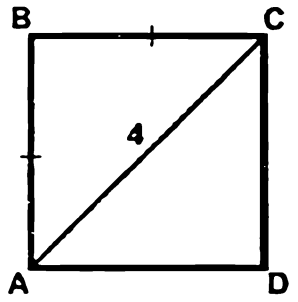
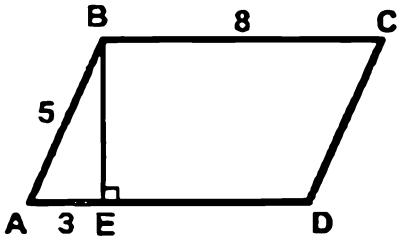
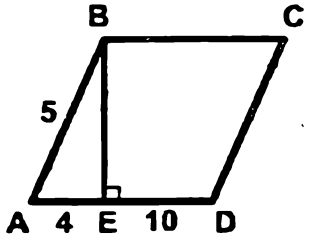
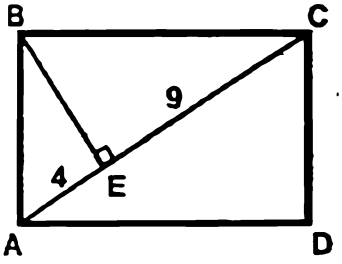
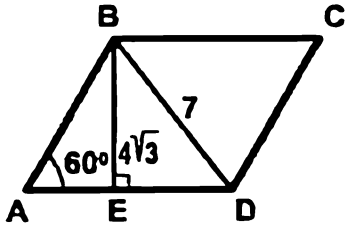
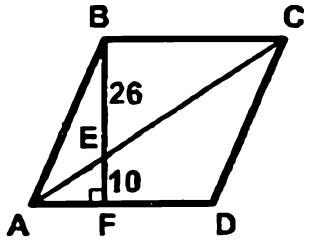
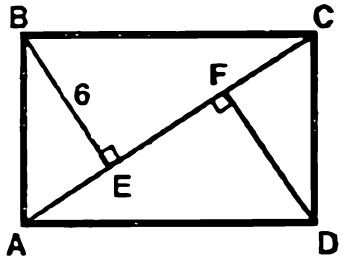
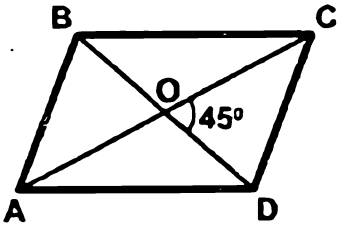
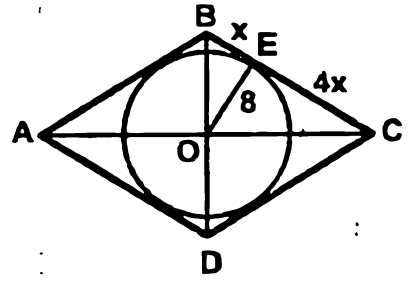
12



Дано: $\angle A = \angle C$.

Таблиця 9.10. Площа чотирикутника

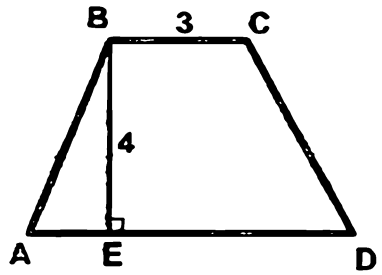
Знайти площу $ABCD$:

Прямокутник	Паралелограм	Ромб
1 	5 	9  Дано: $AC = 8$, $BD = 5$.
2 	6 	10 
3 	7 	11 
4  Дано: $EF = 16$.	8  Дано: $AC = 8$, $BD = 6$.	12 

Таблиця 9.11. **Площа чотирикутника**

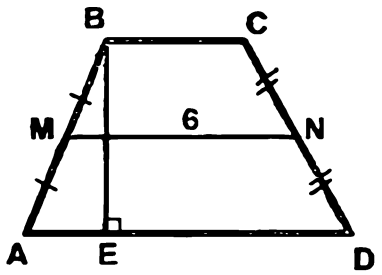
Знайти площу трапеції $ABCD$:

1



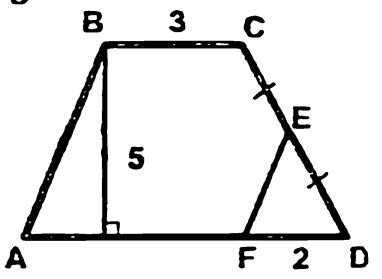
Дано: $AD = 7$.

2



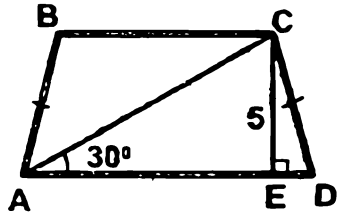
Дано: $BE = 5$.

3

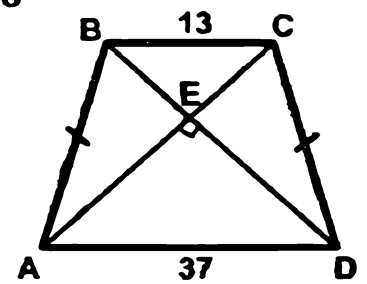


Дано: $AB \parallel FE$.

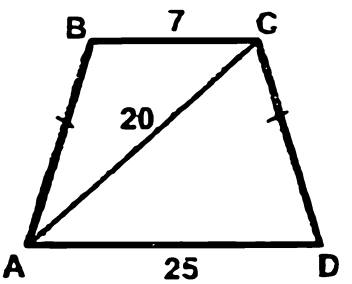
4



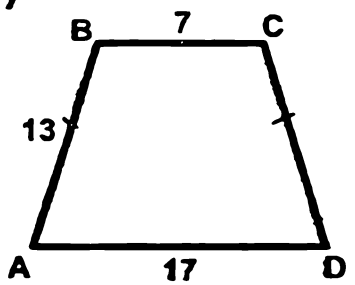
5



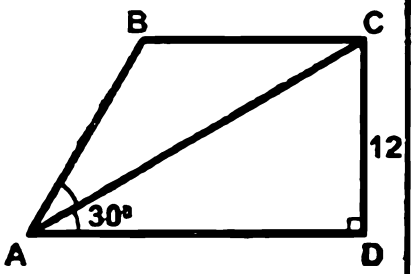
6



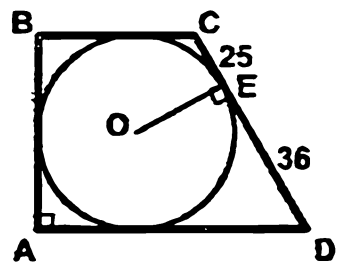
7



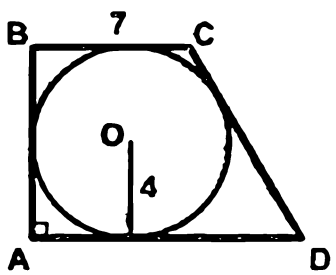
8



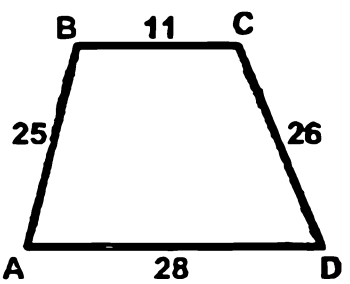
9



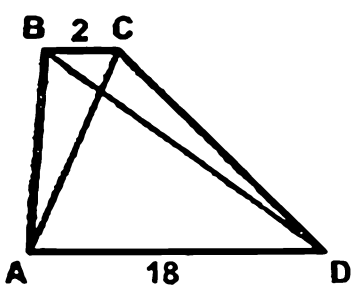
10



11



12

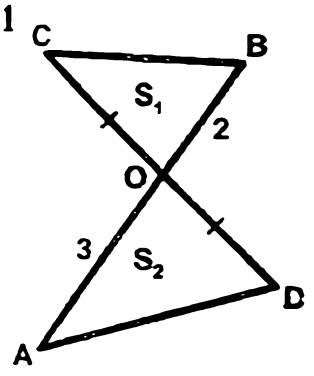


Дано: $AC = 7$, $BD = 15$.

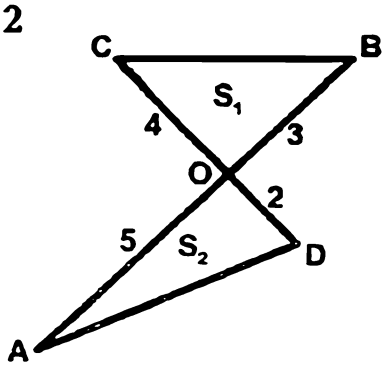
Таблиця 9.12. **Площі фігур**

Знайти відношення площ $\frac{S_1}{S_2}$:

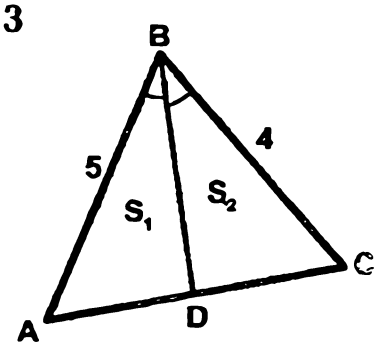
1



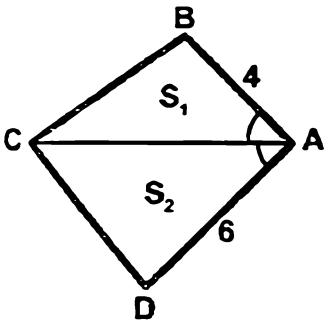
2



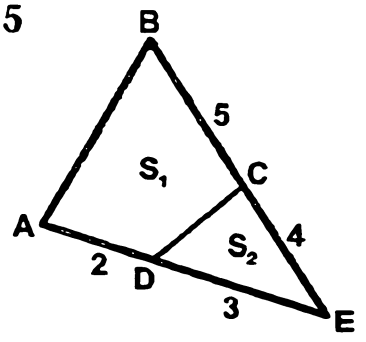
3



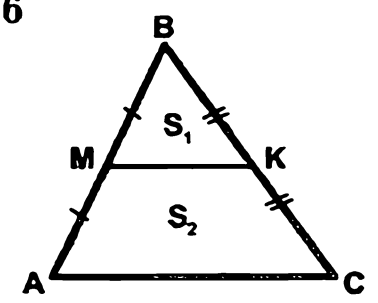
4



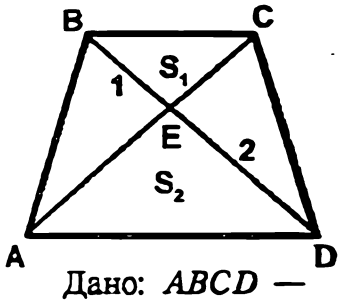
5



6

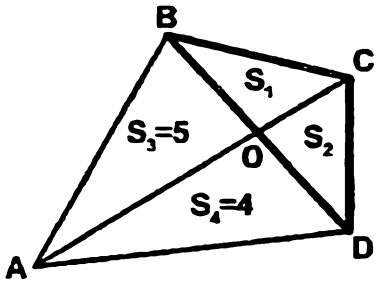


7

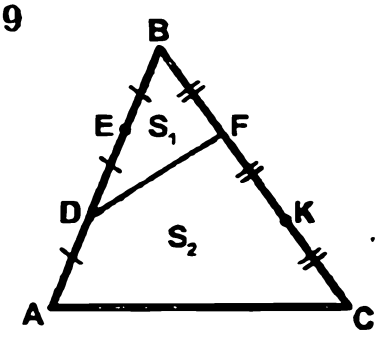


Дано: *ABCD* — трапеція.

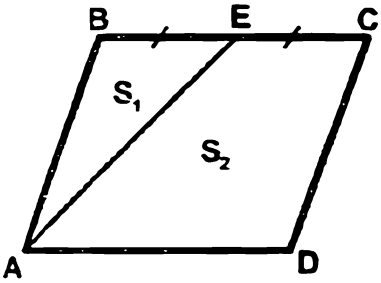
8



9

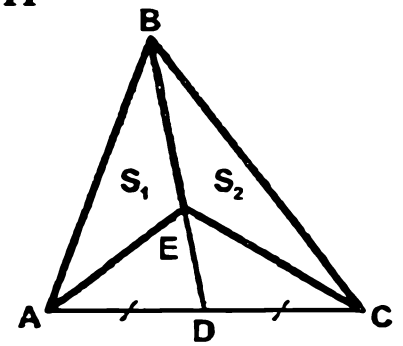


10

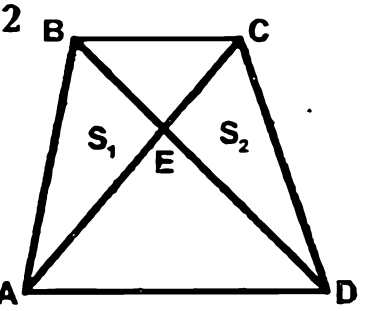


Дано: *ABCD* — паралелограм.

11



12

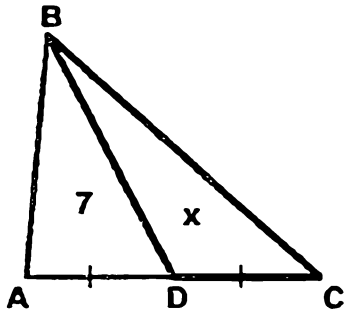


Дано: *ABCD* — трапеція.

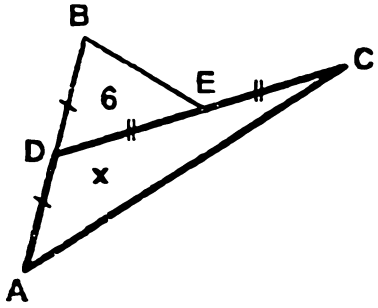
Таблиця 9.13. **Площі фігур**

Знайти площу x:

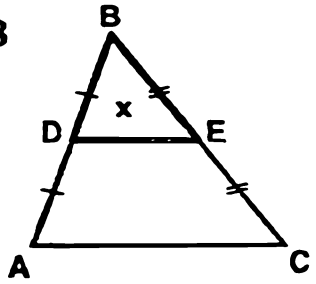
1



2



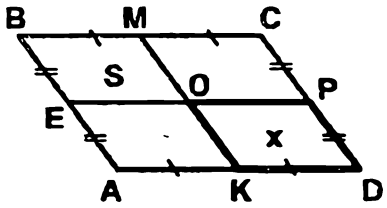
3



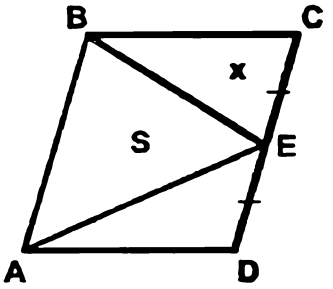
Дано: $S_{\Delta ABC} = 8$.

$ABCD$ — паралелограм.

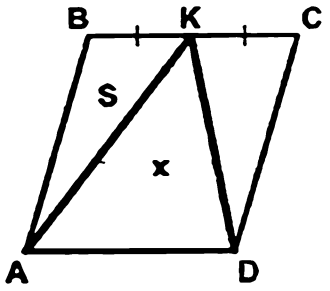
4



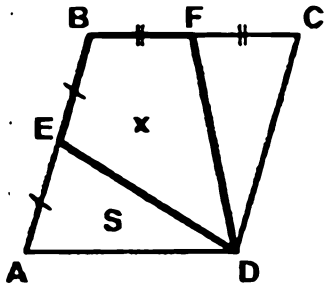
5



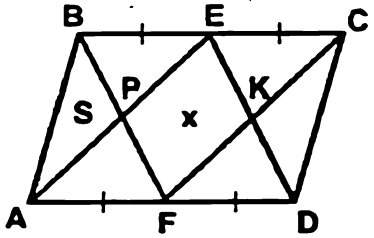
6



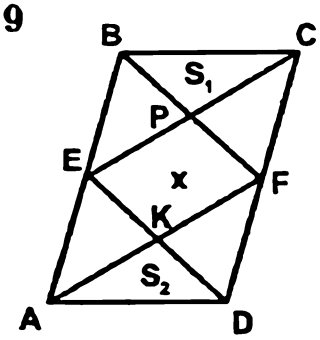
7



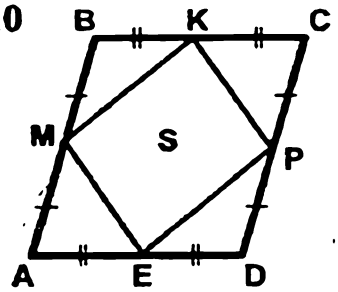
8



9

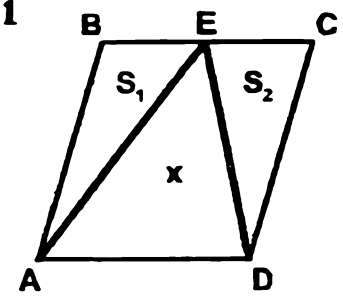


10

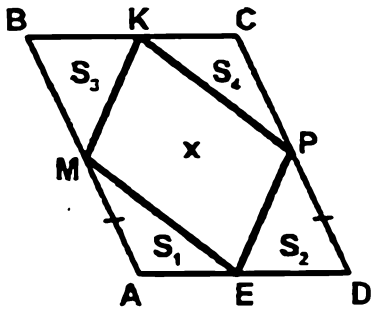


Знайти: S_{ABCD}.

11



12

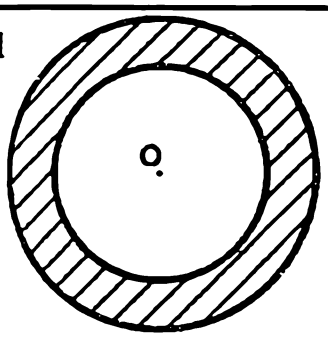


Таблиця 9.14. Площа круга та його частин

R — радіус круга, O — центр.

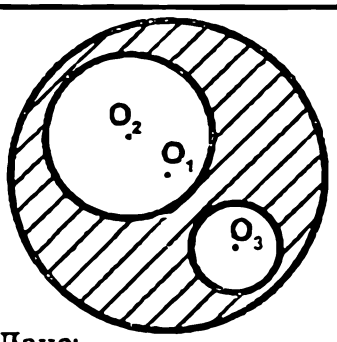
Знайти площу заштрихованої фігури:

1



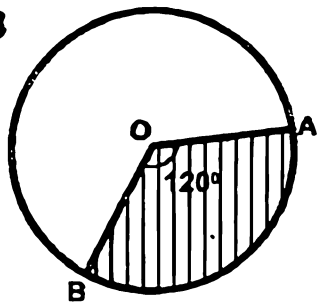
Дано: $R_1 = 5$; $R_2 = 3$.

2



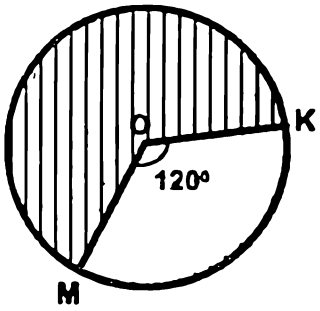
Дано: $R_1 = 10$; $R_2 = 6$; $R_3 = 2$.

3



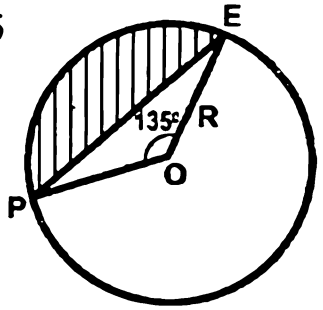
Дано: $R = 3$.

4

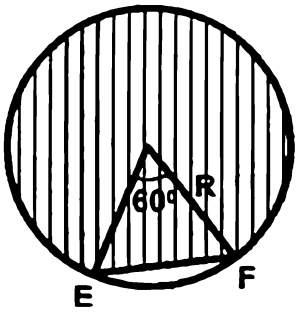


Дано: $R = 6$.

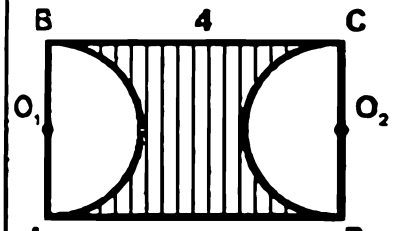
5



6

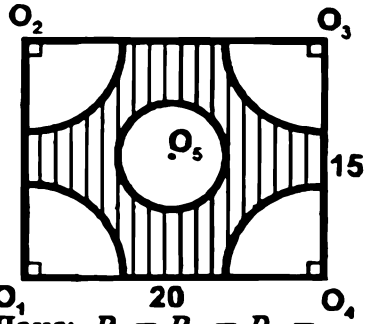


7



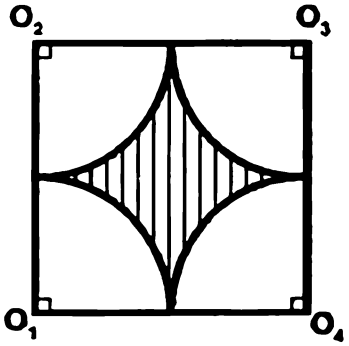
Дано: $ABCD$ — прямокутник; $R_1 = R_2 = 1$.

8



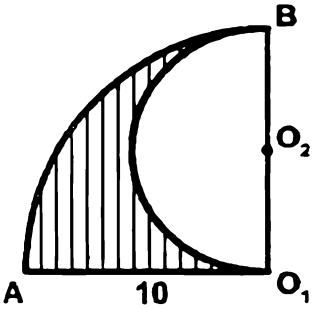
Дано: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2$. $R_5 = 3$.

9



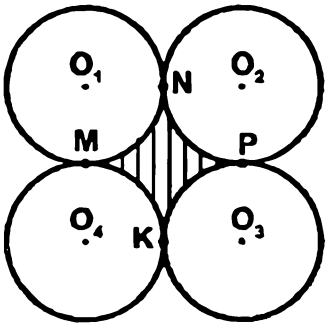
Дано: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4$.

10



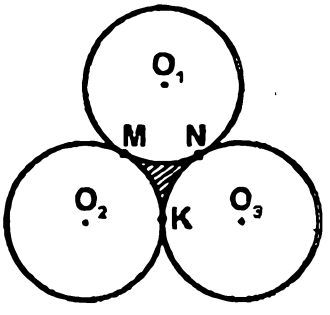
Дано: $R_1 = 10$.

11



Дано: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2$.

12



Дано: $R_1 = R_2 = R_3 = 4$.

Глава II

Метод ключових задач

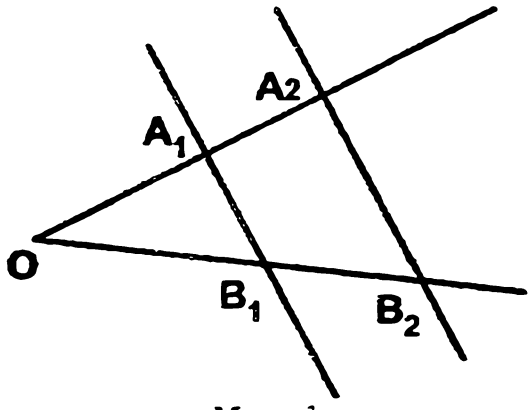
§1. Паралельні прямі, що перетинають сторони кута

Ключова задача.

Якщо $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (мал. 1), то

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} \text{ і}$$

$$\frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{B_1B_2}.$$



Мал. 1

Розв'язання.

Оскільки

$$\Delta OA_1B_1 \backsim \Delta OA_2B_2$$

за першою ознакою, то відповідні сторони цих трикутників пропорційні. Звідки $\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$. Маємо:

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2}, \quad \frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OB_2}{OB_1},$$

$$\frac{OA_2}{OA_1} - 1 = \frac{OB_2}{OB_1} - 1, \quad \frac{OA_2 - OA_1}{OA_1} = \frac{OB_2 - OB_1}{OB_1},$$

$$\frac{A_1A_2}{OA_1} = \frac{B_1B_2}{OB_1}, \quad \frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{B_1B_2}.$$

Приклади

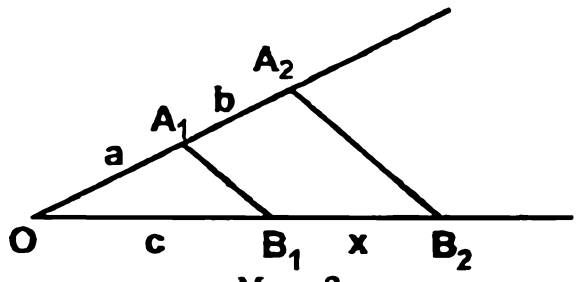
Задача 1.

Дано три відрізки a, b і c. Побудувати такий відрізок x, що $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Розв'язання.

На сторонах довільного кута відкладемо відрізки $OA_1 = a$, $A_1A_2 = b$, $OB_1 = c$ (мал. 2). З'єднаємо точки A_1 і B_1. Проведемо $A_2B_2 \parallel A_1B_1$. Тепер можна записати $\frac{a}{b} = \frac{c}{B_1B_2}$.

Отже, відрізок B_1B_2 є шуканим.

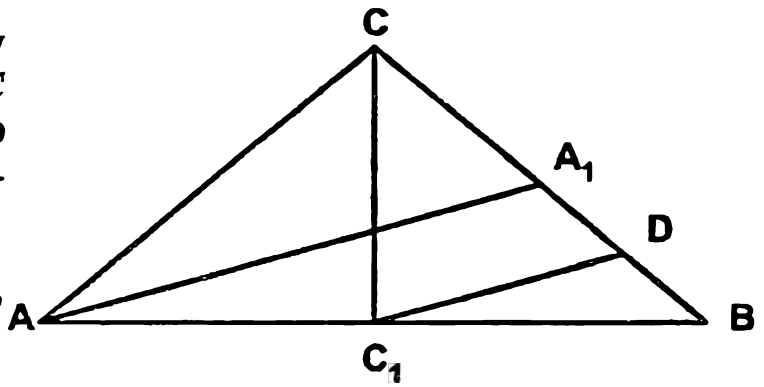


Мал. 2

Задача 2.

У рівнобедреному трикутнику ABC $(AC = CB)$ проведено медіану CC_1 і бісектрису AA_1.

Знайти $\angle ACB$, якщо $AA_1 = 2CC_1$.



Мал. 3

Розв'язання.

Проведемо $C_1D \parallel AA_1$ (мал. 3). Оскільки $AC_1 = C_1B$, то C_1D — середня лінія трикутника AA_1B, отже,

$$C_1D = \frac{1}{2}AA_1 = CC_1,$$

тобто трикутник CC_1D — рівнобедрений.

Нехай $\angle ACC_1 = \angle C_1CB = \angle CDC_1 = \alpha$. Тоді

$$\angle CAC_1 = \angle CBC_1 = 90° - \alpha,\ \angle A_1AC_1 = \angle DC_1B = 45° - \frac{\alpha}{2}.$$

За властивістю зовнішнього кута трикутника запишемо

$$\angle CDC_1 = \angle DC_1B + \angle DBC_1,$$

тобто $\alpha = 45° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \alpha$. Звідси $2\alpha = 108°, \angle ACB = 108°$.

Задача 3.

Висота BK ромба $ABCD$, що проведена на сторону AD, перетинає діагональ AC в точці M. Знайти MD, якщо відомо, що $BK = 4$, $AK : KD = 1 : 2$.

Розв'язання.

Проведемо $OL \perp AD$ (мал. 4). Маємо

$$BO = OD,\ BK \parallel OL,$$

тоді $\frac{DL}{LK} = \frac{DO}{OB} = 1$, тобто $DL = LK$. Враховуючи, що

$$AK : KD = 1 : 2,$$

одержуємо $AK = KL$. Оскільки $KM \parallel OL$, то KM — середня лінія трикутника AOL. Маємо:

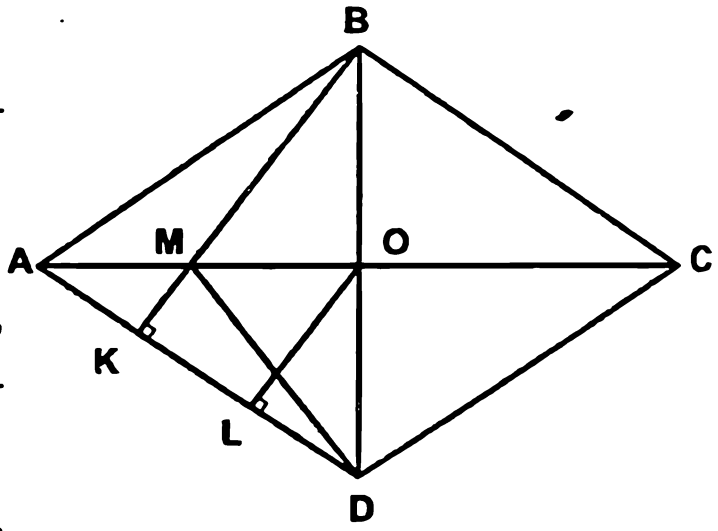
$$KM = \frac{1}{2}OL,\ OL = \frac{1}{2}BK,$$

отже,

$$MK = \frac{1}{4}BK = 1.$$

Звідки

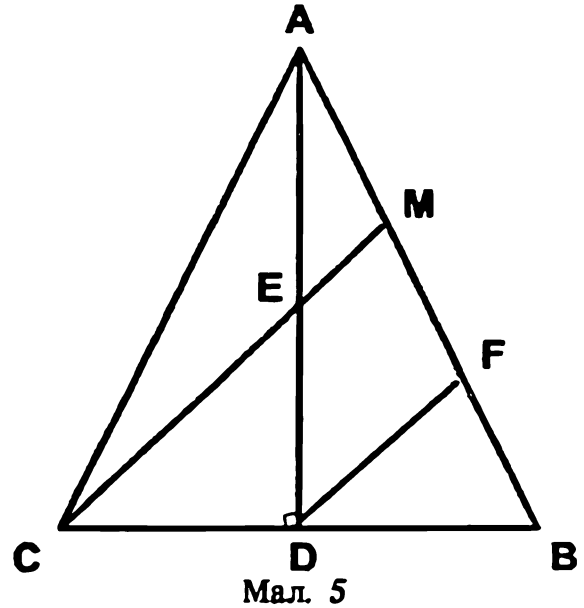
$$MD = BM = BK - MK = 3.$$



Мал. 4

Задача 4.

У рівнобедреному трикутнику ABC $(AC = AB)$ відношення висоти AD до основи BC дорівнює $\sqrt{3}$. Точку M взято на стороні AB так, що $AM = \frac{1}{3}AB$. Знайти величину кута MCB.



Мал. 5

Розв'язання.

Проведемо $DF \parallel CM$ (мал. 5). Оскільки $CD = DB$, то $MF = FB$, а враховуючи, що $AM = \frac{1}{3}AB$, одержимо $AM = MF$. Звідси $DE = AE$. Маємо:

$$\operatorname{tg} \angle ECD = \frac{DE}{DC} = \frac{2DE}{2DC} = \frac{AD}{BC} = \sqrt{3}.$$

Отже, $\angle ECD = 30°$.

Вправи

1.1. Побудувати відрізок $\frac{a^2}{b}$, де a і b — довжини даних відрізків.

1.2. Висота CD трикутника ABC ділить медіану BM у співвідношенні 3:1, рахуючи від вершини B. В якому відношенні CD ділить сторону AB, рахуючи від вершини A?

1.3. У трикутник вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на бічних сторонах, а дві — на основі. Діагоналі прямокутника паралельні бічним сторонам. В якому відношенні вершини прямокутника ділять бічні сторони?

1.4. Висота трикутника ділить основу у відношенні 3:7. В якому відношенні серединний перпендикуляр до основи ділить бічну сторону?

1.5. У трикутнику ABC проведено медіани AM і BK. Через середину BK проведено пряму, паралельну AM. В якому відношенні ця пряма і точка M ділять сторону BC, рахуючи від вершини B?

1.6. M і P — середини суміжних сторін AD і DC паралелограма $ABCD$. MC і PB перетинаються в точці K. Знайти $BK : KP$.

1.7. У трикутнику ABC A_1 лежить на BC і $BA_1 : A_1C = 1 : 3$, C_1 — середина AB. Знайти $AK : KA_1$, де K — точка перетину AA_1 і CC_1.

1.8. D — середина сторони AC трикутника ABC. Q — точка перетину медіан трикутника DBC. Пряма AQ перетинає сторону BC у точці M. Знайти $BM : MC$.

1.9. У гострокутному трикутнику ABC довжини медіан BM, CN і висоти AH дорівнюють відповідно 4, 5 і 6. Знайти площу трикутника ABC.

1.10. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) ортоцентр ділить навпіл відстань між центром описаного кола і основою. Визначити $\cos \angle ABC$.

1.11. У трикутнику ABC $AB = AC = 75$. $BC = 90$. Вершини B і C сполучені з серединою O висоти, проведеної з вершини A. BO і CO, перетинають сторони AC і AB відповідно в точках B_1 і C_1. Знайти площу чотирикутника OC_1AB_1.

1.12. Довжина основи AC трикутника ABC дорівнює 3, а медіани AD — 4. Висота BE ділить медіану AD навпіл. Знайти площу трикутника ABC.

1.13. У гострокутному трикутнику ABC через вершину B і середину висоти CD проведено пряму. В якому співвідношенні ця пряма ділить сторону AC, рахуючи від вершини A, якщо $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$.

1.14. У трикутнику ABC $AC > AB$, а кут при вершині A дорівнює α. На стороні AC взято точку M так, що $AB = MC$. Нехай E — середина відрізка AM, D — середина відрізка BC. Знайти $\angle CED$.

1.15. На сторону BC ромба $ABCD$ проведено висоту DE. Діагональ AC перетинає висоту DE в точці F так, що $DF : FE = 5 : 1$. Знайти сторону ромба, якщо $AE = 5$.

1.16. Медіана BD і бісектриса AE трикутника ABC перетинаються в точці M, причому $AM : ME = 3 : 1$, $AE = b$, $BD = a$. Знайти площу трикутника ABD.

1.17. У трикутнику ABC на основі AC взято точки P і Q так, що $AP < AQ$. Прямі BP і BQ ділять медіану AM на три рівні частини. Відомо, що $PQ = 3$. Знайти AC.

1.18. У трикутнику ABC точки P і Q лежать на стороні AC, а прямі BP і BQ ділять медіану M на три рівні частини. Відомо, що $BP = BQ$, $AB = 9$, $BC = 11$. Знайти AC.

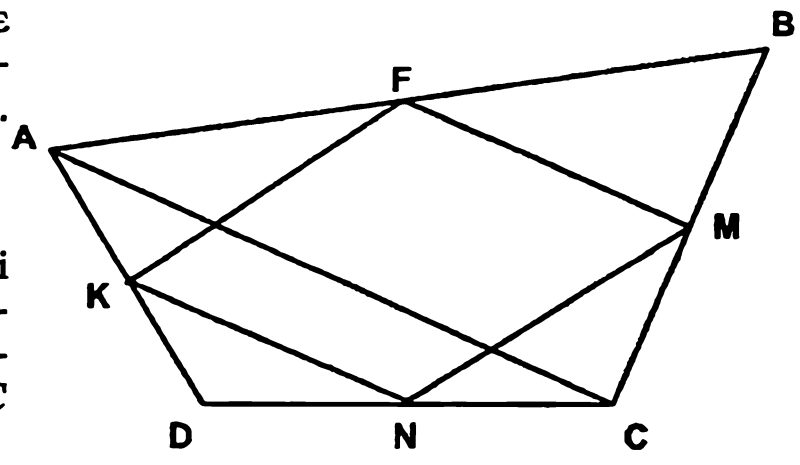
1.19. Через вершину B трикутника ABC проведено пряму, що паралельна бісектрисі кута C і перетинає продовження сторони AC у точці D. Визначити, в якому відношенні пряма AE ділить сторону BC, якщо E — середина BD і $AC : CB = b : a$.

1.20. У прямокутному ΔABC ($\angle C = 90°$) через вершину A і середину висоти CD проведено пряму, що перетинає катет BC в точці M. Довести, що $CM : MB = \cos^2 A$.

§2. Середини сторін чотирикутника

Ключова задача.

Середини сторін опуклого чотирикутника є вершинами паралелограма, площа якого дорівнює половині площі даного чотирикутника.



Мал. 6

Розв'язання.

Відрізки FM і KN (мал. 6) є середніми лініями трикутників ABC і ADC відповідно. Тоді

$$FM \parallel AC, \quad FM = \frac{1}{2}AC \text{ і } KN \parallel AC, \; KN = \frac{1}{2}AC.$$

Звідси $FM = KN$, $FM \parallel KN$, і отже, чотирикутник $FMNK$ — паралелограм.

Нехай площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює S.

$$S_{FBM} = \frac{1}{4}S_{ABC} \text{ і } S_{KDN} = \frac{1}{4}S_{ADC}.$$

Звідси $S_{FBM} + S_{KDN} = \frac{1}{4}S$. Аналогічно $S_{PAK} + S_{MCN} = \frac{1}{4}S$.

Одержуємо $S_{FMNK} = S - (S_{FBM} + S_{KDN} + S_{PAK} + S_{MCN}) = \frac{1}{2}S$.

Приклади

Задача 1.

Довести, що в опуклому чотирикутнику сума квадратів діагоналей вдвічі більша за суму квадратів відрізків, що сполучають середини протилежних сторін.

Розв'язання.

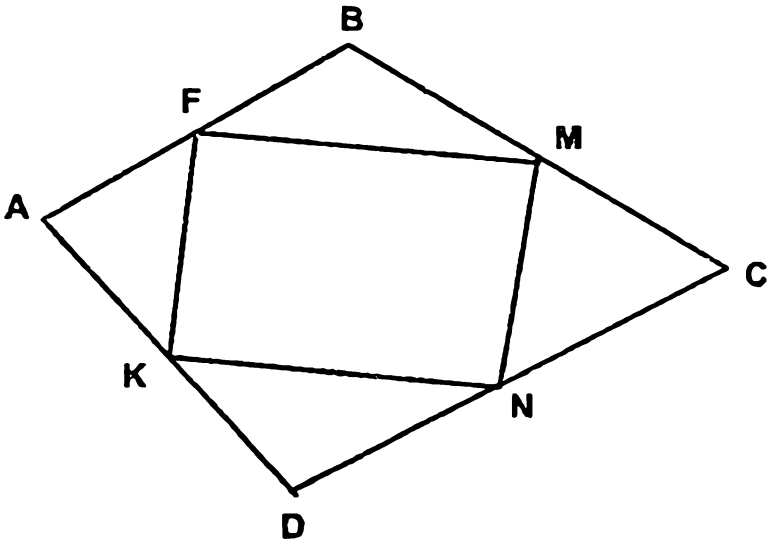
Скориставшись теоремою про сторони і діагоналі паралелограма, маємо $FN^2 + MK^2 = 2(FM^2 + MN^2)$ (мал. 7).

Враховуючи, що $FM = \frac{1}{2}AC$ і $MN = \frac{1}{2}BD$, одержуємо

$$FN^2 + MK^2 = 2\left(\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2\right) = \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2).$$

Задача 2.

Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні, довжина однієї з них дорівнює 6 см. Довжина відрізка, що з'єднує середини основ, дорівнює 4,5 см. Знайти площу трапеції.

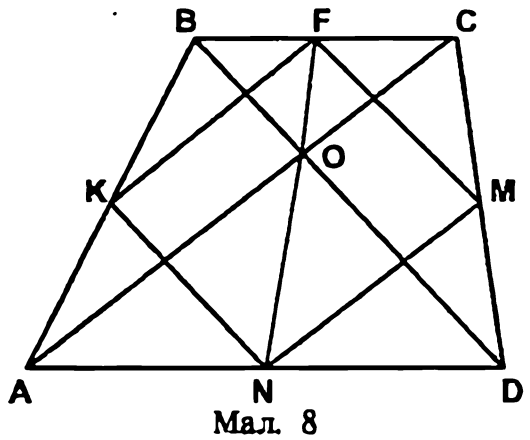


Мал. 7

Розв'язання.

Нехай K і M (мал. 8) — середини бічних сторін трапеції.

$FN = 4{,}5$, $AC = 6$ і $\angle BOA = 90°$.



Мал. 8

Оскільки $KF \parallel AC$ і $KN \parallel BD$, то $\angle NKF = 90°$ і $KFMN$ — прямокутник. Тоді з прямокутного трикутника FKN одержуємо:

$$KN = \sqrt{FN^2 - KF^2} = \sqrt{4{,}5^2 - 3^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

$$S_{KFMN} = KF \cdot KN = \frac{9\sqrt{5}}{2},$$

а оскільки $S_{ABCD} = 2S_{KFMN}$, то

Відповідь: $9\sqrt{5}$.

Вправи

2.1. Довести, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба.

2.2. Довести, що середини сторін ромба є вершинами прямокутника.

2.3. Довести, що середини сторін рівнобедреної трапеції є вершинами ромба.

2.4. Довести: якщо відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін опуклого чотирикутника, рівні, то діагоналі чотирикутника перпендикулярні.

2.5. Довести: якщо відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін опуклого чотирикутника, перпендикулярні, то діагоналі чотирикутника рівні.

2.6. Середини сторін трапеції є вершинами ромба. Визначити вид трапеції.

2.7. Довести, що відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін опуклого чотирикутника, і відрізок, який з'єднує середини діагоналей, перетинаються в одній точці.

2.8. Довести: якщо відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін опуклого чотирикутника, ділять його на чотири рівновеликі частини, то такий чотирикутник — паралелограм.

2.9. У трапеції $ABCD$ сума внутрішніх кутів, прилеглих до основи AD, дорівнює 90°. K і L — середини основ трапеції, M і N — середини діагоналей. Доведіть, що $MN = KL$.

2.10. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$. Через середини діагоналей AC і BD проведено пряму, яка перетинає AB і CD в точках M і N відповідно. Доведіть, що $\angle BMN = \angle CNM$.

2.11. Довести, что площі опуклих чотирикутників, у яких середини сторін збігаються, рівні.

2.12. Середини сторін двох шестикутників збігаються. Довести, что площі шестикутників рівні.

2.13. Дано рівнобічний трикутник ABC. З центром у точці A радіусом AB описано дугу BC. M — довільна точка дуги BC, яка відрізняється від B і C. Середини хорд MC і MB з'єднано відрізками з серединами сторін AB і AC відповідно. Довести, що одержані відрізки взаємно перпендикулярні.

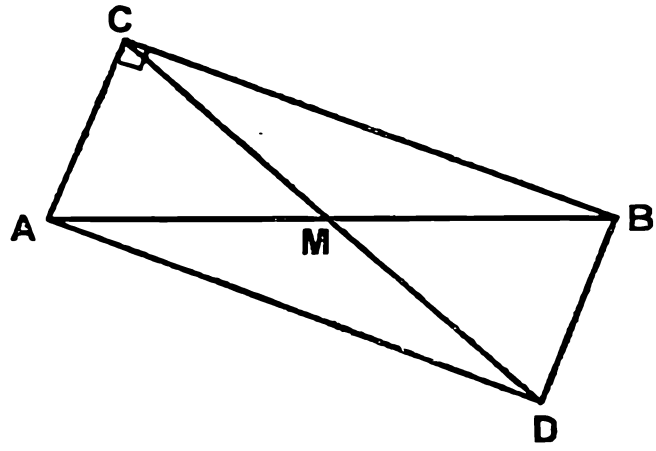
§3. Медіана, яку проведено до гіпотенузи

Ключова задача 1.

У прямокутному трикутнику довжина медіани, що виходить з вершини прямого кута, дорівнює половині довжини гіпотенузи.

Розв'язання.

На промені CM відкладемо відрізок MD, що дорівнює відрізку CM (мал. 9). У чотирикутнику $ACBD$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл, отже, $ACBD$ — паралелограм. Але $\angle ACB = 90°$, значить, $ACBD$ — прямокутник. Звідси $CM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$.



Мал. 9

Наслідок. Центр описаного кола прямокутного трикутника лежить на середині гіпотенузи.

Ключова задача 2.

Якщо в трикутнику довжина медіани дорівнює половині довжини основи, до якої її проведено, то цей трикутник прямокутний.

Розв'язання.

Виконуючи вищенаведену додаткову побудову, прийдемо до висновку, що $ABCD$ — це паралелограм з рівними діагоналями, тобто прямокутник. Звідси $\angle ACB = 90°$.

Приклади

Задача 1.

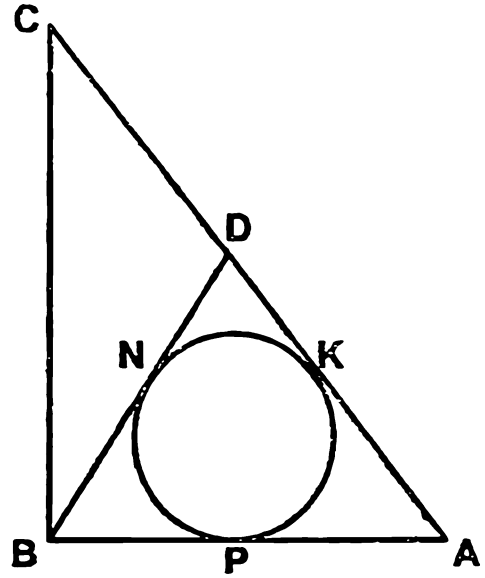
BD — медіана прямокутного трикутника ABD ($\angle B = 90°$). Нехай K — точка дотику сторони AD трикутника ABC з колом, вписаним у цей трикутник. Знайти кути трикутника ABC, якщо K ділить AD навпіл.

Розв'язання.

Нехай N — точка дотику кола до сторони BD трикутника BDA (мал. 10). Маємо

$$DK = DN = x.$$

Оскільки K — середина AD, то $AP = AK = x$. За властивістю медіани, яку проведено до гіпотенузи, $BD = AD = 2x$. Звідси $BN = BP = x$. Отже, трикутник ABD — рівнобічний. Маємо $\angle A = 60°$, $\angle C = 30°$.



Мал. 10

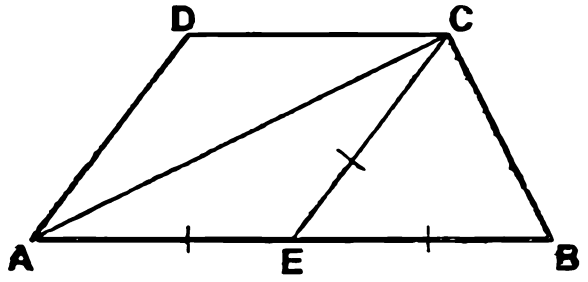
Задача 2.

Знайти основи AB і CD трапеції $ABCD$, в якої $AB = 2CD = 2AD$, $AC = a$, $BC = b$.

Розв'язання.

Проведемо $CE \parallel AD$ (мал. 11). Нехай $AD = x$. Тоді

$$CE = x,$$
$$AB = 2DC = 2x.$$



Мал. 11

Але $AE = DC = x$. Звідси CE — медіана трикутника ACB. $CE = \frac{1}{2}AB$. Отже, $\angle ACB = 90°$. Маємо

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Вправи

3.1. Довести, що сума відстаней від основи двох висот трикутника до середини його третьої сторони дорівнює третій стороні.

3.2. Медіана, яку проведено до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює m і ділить прямий кут у відношенні 1:2. Знайти сторони трикутника.

3.3. У трикутнику ABC медіани, що виходять з вершин A і C, взаємно перпендикулярні. Знайти відношення медіани, яку проведено до сторони AC, до сторони AC.

3.4. У трикутнику ABC медіани BB_1 і CC_1 перетинаються в точці M і взаємно перпендикулярні. Знайти MA, якщо $BB_1 = 36$, $CC_1 = 15$.

3.5. Довести, що висота і медіана прямокутного трикутника, які проведено до гіпотенузи, утворюють кут, що дорівнює різниці гострих кутів трикутника.

3.6. Гіпотенуза прямокутного трикутника в 4 рази більша за проведену до неї висоту. Знайти гострий кут трикутника.

3.7. У трикутнику ABC сторони AB і AC дорівнюють відповідно 8 і 7, $\angle BAC = 120°$. Знайти відстань від основи висоти, яку проведено на AC, до середини BC.

3.8. У трикутнику ABC медіани BD і AF перетинаються під прямим кутом у точці O, причому $BO = AD$. Знайти відношення радіусів кіл, описаних навколо трикутників BOF і AOB.

3.9. Довжина середньої лінії трапеції дорівнює 5, а довжина відрізка, який з'єднує середини основ, — 3. Кути при більшій основі дорівнюють 30° і 60°. Знайти основи трапеції та її площу.

3.10. Периметр паралелограма $ABCD$ 80 см. Бісектриси кутів A і D перетинаються в точці M так, що BC ділить AM навпіл. Знайти сторони паралелограма.

3.11. На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок $CM = BC$. Довести, що $\angle ABM$ — тупий.

3.12. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) MN — середня лінія. Бісектриса кута ABC перетинає її в точці P. Довести, що $\angle APB = 90°$.

3.13. У прямокутному трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90°$. Через точки A і C і середину гіпотенузи проведено коло радіуса R. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

3.14. M і N — середини сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Доведіть: якщо $DM \perp AC$, то $BN : CD = 3 : 2$.

§4. Співвідношення в прямокутному трикутнику

Ключова задача.

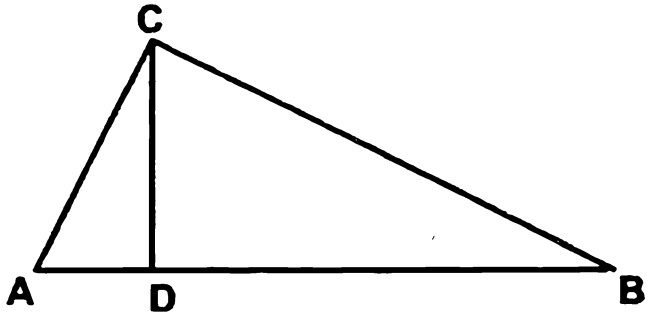
У прямокутному трикутнику ABC, в якому $\angle C = 90°$, CD — висота (мал. 12), мають місце такі співвідношення:

1) $AC^2 = AD \cdot AB$;

2) $BC^2 = BD \cdot AB$;

3) $CD^2 = AD \cdot DB$;

4) $\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AD}{BD}$.



Мал. 12

Розв'язання.

$\Delta ACD \backsim \Delta ABC$ за першою ознакою. Звідси $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$, $AC^2 = AD \cdot AB$. З подібності трикутників BCD і ABC аналогічно одержуємо друге співвідношення.

Оскільки $\angle ACD = \angle CBD$, то $\Delta ACD \backsim \Delta BCD$. Тоді $\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD}$, $CD^2 = BD \cdot AD$.

Четверте співвідношення безпосередньо випливає з перших двох.

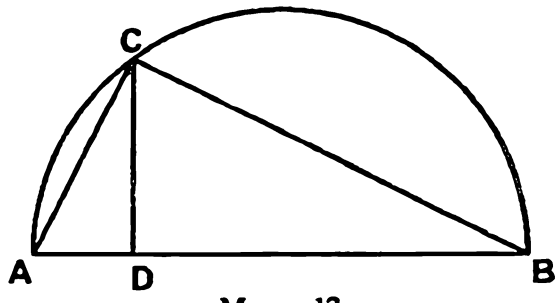
Приклади

Задача 1.

Побудувати квадрат, рівновеликий даному прямокутнику.

Розв'язання.

Нехай довжини сусідніх сторін прямокутника a і b. Якщо x — довжина сторони шуканого квадрата, то $x^2 = ab$. Отже, треба за двома заданими відрізками a і b побудувати такий відрізок x, щоб $x = \sqrt{ab}$. На одній прямій відкладемо два відрізки $AD = a$ і $DB = b$ (мал. 13).

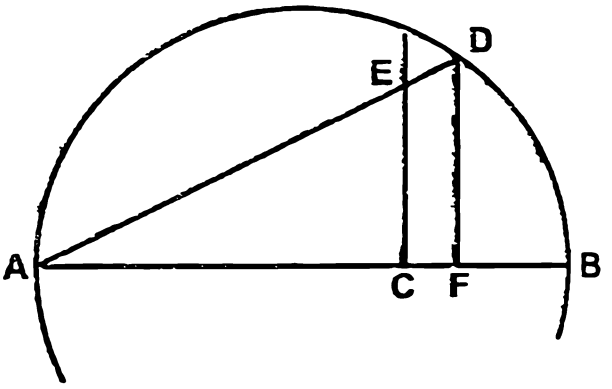


Мал. 13

На відрізку AB як на діаметрі побудуємо півколо. У точці D проведемо перпендикуляр до AB. Цей перпендикуляр перетне півколо в точці C. Відрізок CD — сторона шуканого квадрата. Справді, $\angle ACD = 90°$ (вписаний кут, що опирається на діаметр). Тоді має місце третє співвідношення, тобто $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{ab}$.

Задача 2.

Діаметр AB кола дорівнює 1. На ньому відкладено відрізок AC довжиною a. Проведено також хорду AD довжиною b (мал. 14). З точки C проведено перпендикуляр до AB, що перетинає хорду AD в точці E, а з точки D проведено перпендикуляр DF на AB. Виявилося, що $AE = AF$. Доведіть, що $a = b^3$.



Мал. 14

Розв'язання.

$\angle ADB = 90°$, $DF \perp AB$, тоді $AD = \sqrt{AB \cdot AF}$. Звідси $AF = \frac{AD^2}{AB} = b^2 = AE$. $\Delta AEC \backsim \Delta ADF$. Запишемо $\frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AD}$, $\frac{a}{b^2} = \frac{b^2}{b}$, $a = b^3$.

Вправи

4.1. Діаметр AB розділено на відрізки $AC = 8$ і $BC = 5$. З точки C до нього проведено перпендикуляр CD довжиною 6. Визначте положення точки D відносно кола.

4.2. Висота, яку проведено на гіпотенузу прямокутного трикутника, ділить її на відрізки 24 і 54. Знайдіть катети.

4.3. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6, його проекція на гіпотенузу — 2. Знайти гіпотенузу і другий катет.

4.4. Один катет прямокутного трикутника дорівнює 6, а проекція другого катета на гіпотенузу — 5. Знайдіть гіпотенузу.

4.5. Визначте катети прямокутного трикутника, у якого перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута на гіпотенузу, більший за один з відрізків гіпотенузи на 3 і менший за другий на 4.

4.6. Визначте менший катет прямокутного трикутника і довжину перпендикуляра, який проведено з вершини прямого кута на гіпотенузу, якщо більший катет трикутника менший від гіпотенузи на 2 і більший за прилеглий до нього відрізок гіпотенузи на 1,6.

4.7. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 15, а проекція другого катета на гіпотенузу дорівнює 16. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

4.8. Знайти площу круга, вписаного в прямокутний трикутник, якщо проекції катетів на гіпотенузу дорівнюють 9 і 16.

4.9. Через вершину прямого кута прямокутного трикутника з катетами 6 і 8 проведено перпендикуляр до гіпотенузи. Обчисліть площі утворених трикутників.

4.10. Визначте площу рівнобедреної трапеції, у якої основи 10 і 26, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

4.11. Діагональ рівнобедреної трапеції дорівнює $3\sqrt{13}$ і перпендикулярна до бічної сторони. Різниця основ дорівнює 8. Визначте площу трапеції.

4.12. Визначте висоту рівнобедреної трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а різниця квадратів основ дорівнює 25.

4.13. Дано рівнобедрену трапецію, середня лінія якої 9, площа дорівнює 54 і діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Визначте основи трапеції.

4.14. У коло вписано трапецію, бічна сторона якої дорівнює 15, середня лінія 16 і більша основа є діаметром кола. Визначте площу трапеції.

4.15. У коло вписано трапецію, середня лінія якої дорівнює 16, бічна сторона більша за меншу основу на 8 і більша основа є діаметром кола. Визначити висоту трапеції.

4.16. У півколо одиничного радіуса вписано трапецію так, що її основа лежить на діаметрі. Знайти площу трапеції, якщо її периметр дорівнює 5.

4.17. Діагоналі прямокутної трапеції взаємно перпендикулярні, і більша з них точкою перетину ділиться на відрізки, які дорівнюють 36 і 34. Визначте основи трапеції.

4.18. Перпендикуляр, який проведено з вершини тупого кута ромба на його сторону, ділить більшу діагональ на відрізки, що дорівнюють 3,5 і 12,5. Визначити сторону і меншу діагональ ромба.

4.19. Площа прямокутного трикутника дорівнює $2\sqrt{3}$. Визначте його висоту, яку проведено до гіпотенузи, якщо вона ділить прямий кут у відношенні 1:2.

4.20. Коло, побудоване на катеті прямокутного трикутника як на діаметрі, ділить гіпотенузу у відношенні 1:3. Знайдіть кути трикутника.

4.21. На катеті AC прямокутного трикутника ABC як на діаметрі побудовано коло. Воно перетинає гіпотенузу AB в точці D, $AC = b$, $AD : DC = 4 : 3$. Знайти відстань від точки B до центра кола.

4.22. Дано ромб $ABCD$ ($\angle A$ — гострий). На прямій AB вибрано точку F так, що $\angle CFA = 90°$. Відрізки DF і BC взаємно перпендикулярні. Визначити $\cos A$.

4.23. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AD і BP. На висоті AD взято точку M, а на BP — точку N так, що $\angle BMC = \angle ANC = 90°$, $MN = 4 + 2\sqrt{3}$, $\angle MCN = 30°$. Знайти бісектрису кута C трикутника MCN.

§5. Вписаний кут

Ключова задача.

Вписані кути, що спираються на одну дугу, рівні.

Розв'язання.

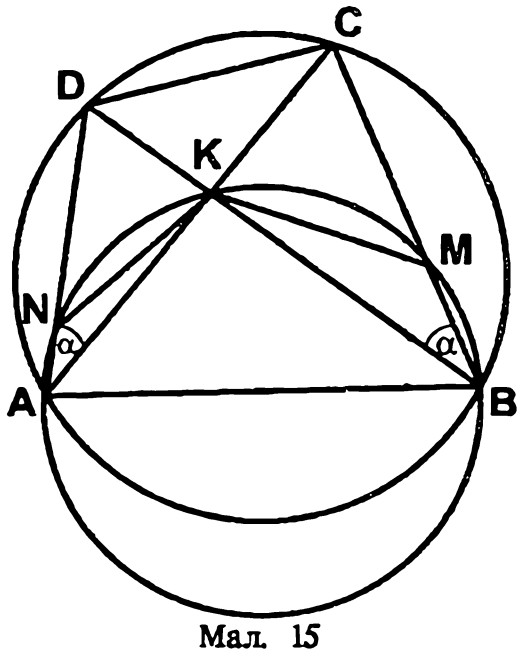
Вписаний кут дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається. Звідси випливає справедливість твердження, яке доводиться.

Наслідок. Вписаний кут, що спирається на діаметр, прямий.

Приклади

Задача 1.

Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Його діагоналі перетинаються в точці K. Коло, що проходить через A, B і K, перетинає BC і AD в точках M і N. Довести, що $KM = KN$.



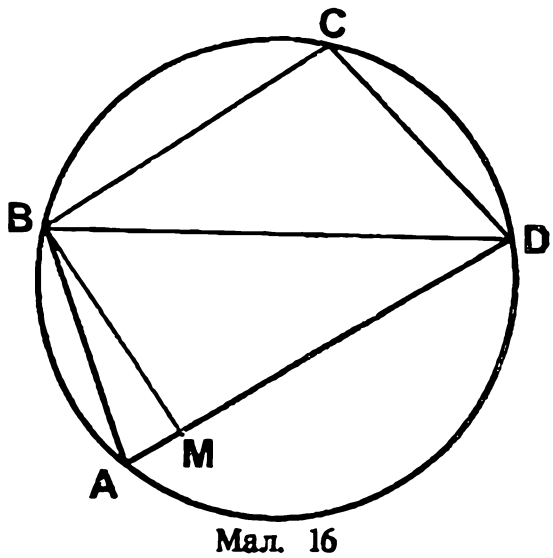
Мал. 15

Розв'язання.

$\angle DAC = \angle DBC$ (мал. 15) як вписані, що спираються на одну дугу. Тоді градусні міри дуг NK і KM рівні. Але рівні дуги стягують рівні хорди, отже, $NK = KM$.

Задача 2.

Довести, що у всіх трапеціях, вписаних у дане коло, зі спільною бічною стороною AB відношення висоти і середньої лінії постійне.



Мал. 16

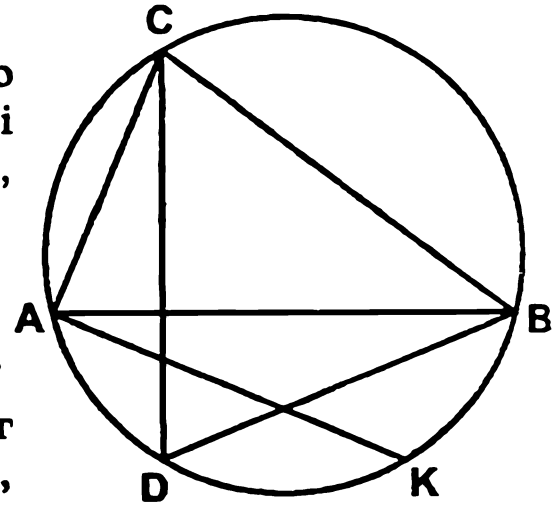
Розв'язання.

Для всіх трапецій градусна міра дуги AB (мал. 16) постійна. Отже, величина кута BDA не

змінюється, тобто $\operatorname{tg} \angle BDA$ — величина постійна. Маємо $\operatorname{tg} \angle BDA = \frac{BM}{MD}$. Треба лише зазначити, що довжина відрізка MD дорівнює середній лінії трапеції.

Задача 3.

У колі радіуса R проведено дві перпендикулярні хорди AB і CD, які перетинаються. Доведіть, що $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.



Мал. 17

Розв'язання.

$\angle ABC + \angle DCB = 90°$ (мал. 17).

Отже, сума градусних мір дуг AC і DB дорівнює 180°. Значить, якщо відкласти хорду $AK = DB$, то градусна міра дуги CAK дорівнюватиме 180°. Звідси $\angle CAK = 90°$ і CK — діаметр.

Маємо

$AC^2 + DB^2 = AC^2 + AK^2 = CK^2 = 4R^2$.

Вправи

5.1. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 35°. Під яким кутом видно кожен його катет з центра описаного кола?

5.2. Висоту, яку проведено з вершини C вписаного в коло трикутника ABC, продовжено до перетину з колом у точці E. Ця точка з'єднана з точкою D, діаметрально протилежною вершині C. Довести, що $DE \parallel AB$.

5.3. Бісектриса кута B трикутника ABC перетинає описане коло в точці D. Довести, що ΔADC — рівнобедрений.

5.4. Довести, що сторона трикутника, яка лежить проти кута в 30°, дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника.

5.5. Довести, що для будь-якої точки X кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, сума $XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2$ — величина постійна.

5.6. Хорда AB перпендикулярна до радіуса OM і ділить його навпіл. Знайти величину кутів AOB і BAM.

5.7. Поза колом з центром O взято точку M. Коло, діаметром якого є OM, перетинає дане коло в точках A і B. Довести, що MA і MB — дотичні до кола з центром у точці O.

5.8. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та проекцією одного з катетів на гіпотенузу.

5.9. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 40°. Одна з бічних сторін слугує діаметром півкола, яке ділиться іншими сторонами на три дуги. Знайти градусні міри цих дуг.

5.10. Через вершини B і C трикутника ABC проходить коло, яке перетинає сторони AB і AC в точках K і M відповідно. Довести, що $\Delta ABC \backsim \Delta AMK$. Знайти MK і AM, якщо $AB = 2$, $BC = 4$, $AC = 5$, $AK = 1$.

5.11. Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку A проведено діаметри AD і AC. Довести, що точки B, C і D лежать на одній прямій.

5.12. Два кола перетинаються в точках A і B. Через B проведено січну, яка перетинає кола в точках C і D. Довести, що величина кута CAD постійна для будь-якої січної, що проходить через точку B.

5.13. Коло, побудоване на стороні паралелограма як на діаметрі, проходить через середину сусідньої сторони і точку перетину діагоналей. Знайти кути паралелограма.

5.14. Два кола перетинаються в точках M і K. Через M і K проведено прямі AB і CD відповідно, які перетинають перше коло в точках A і C, а друге — в точках B і D. Довести, що $AC \parallel BD$.

5.15. У колі проведено діаметр AB і хорду BD. На діаметрі вибрано точку O і проведено коло з центром O, яке дотикається хорди в точці K і вихідного кола в точці A. Доведіть, що AK — бісектриса кута DAB.

5.16. Коло, побудоване на більшій основі трапеції як на діаметрі, дотикається меншої основи і перетинає бічні сторони і ділить їх навпіл. Знайти меншу основу трапеції, якщо радіус кола дорівнює R.

5.17. Центри вписаного і описаного кіл трикутника ABC лежать з різних боків від прямої AB. Довжина сторони AB дорівнює радіусу описаного кола. Чому дорівнює кут AOB, де O — центр вписаного кола?

5.18. У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається його сторін у точках L, M, N. Доведіть, що трикутник LMN завжди гострокутний.

5.19. На стороні CD квадрата $ABCD$ вибрано точку N так, що $\frac{CN}{ND} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$. Через точки B і N проведено пряму, яка перетинає коло, описане навколо квадрата, у точці K. Знайти величину кута KCD.

5.20. Продовження медіани трикутника ABC, проведеної з вершини A, перетинає описане навколо трикутника коло в точці D. Знайти довжину відрізка BC, якщо довжина кожної з хорд AC і DC дорівнює 1.

5.21. У гострокутному трикутнику висоти, які проведено через вершини B і C трикутника ABC, перетинають описане коло в точках B_1 і C_1. Визначити кут A трикутника ABC, якщо пряма B_1C_1 проходить через центр описаного кола.

5.22. У круг вписано рівнобедрений трикутник ABC, $AB = BC = c$. Через точку A проведено хорду $AK = m$, яка перетинає BC в точці M. Знайти довжину відрізка AM.

5.23. Висоти гострокутного трикутника продовжено до перетину з описаним колом. Довести, що відрізки цих ліній від ортоцентра до кола діляться відповідними сторонами навпіл.

5.24. Користуючись тільки лінійкою, проведіть перпендикуляр до заданого діаметра із заданої точки, що лежить поза колом.

5.25. Вершину A гострокутного трикутника ABC з'єднано відрізком з центром O описаного кола. Також проведено висоту AH. Доведіть, що $\angle BAH = \angle OAC$.

5.26. Трикутник ABC — рівнобедрений ($AB = BC$). BD — медіана. Навколо трикутника ABD описано коло радіуса 4. Це коло перетинає сторону BC в точці E. $BE : EC = 7 : 1$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

5.27. У чотирикутнику $ABCD$, який вписано в коло, через вершини A і B і точку P перетину діагоналей проведено коло, що перетинає сторону BC в точці E. Доведіть, що за умови $AB = AD$ $CD = CE$.

5.28. Кола S_1 і S_2 перетинаються в точках A і B. Центр O кола S_1 лежить на S_2. Хорда AC кола S_1 перетинає S_2 в точці D. B і O лежать з різних боків від AC. Доведіть, що $OD \perp BC$.

5.29. Продовження висот гострокутного трикутника ABC перетинають описане коло в точках M_1, M_2, M_3. Доведіть, що в трикутнику $M_1M_2M_3$ висоти трикутника ABC є бісектрисами.

5.30. Бісектриса зовнішнього кута при вершині C трикутника ABC перетинає описане коло в точці D. Доведіть, що $AD = BD$.

5.31. На хорді AB кола S з центром O взято точку C. Описане коло трикутника AOC перетинає коло S в точці D. Доведіть, що $BC = CD$.

5.32. З вершини тупого кута A трикутника ABC проведено висоту AD. З точки D радіусом AD описано коло, що перетинає сторони трикутника AB і AC в точках M і N відповідно. $AB = c$, $AM = m$, $AN = n$. Знайдіть AC.

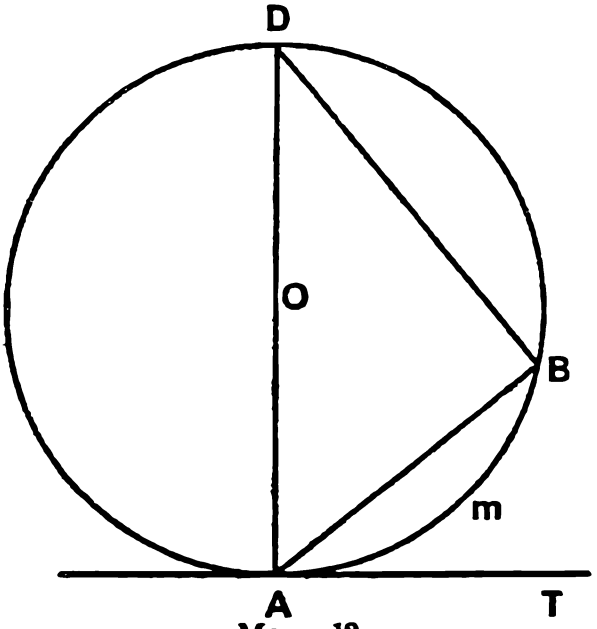
5.33. Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку K першого кола проводять прямі KA і KB, що перетинають друге коло в точках P і Q відповідно. Доведіть, що хорда PQ другого кола перпендикулярна до діаметра KM першого кола.

5.34. У гострокутному трикутнику ABC сума величин кутів A і B в півтора рази більша за величину кута C. Довжина меншої сторони AC дорівнює 3. Знайти довжину висоти BD, якщо відомо, що відрізок, який з'єднує точку D з центром описаного кола, видно з вершини B під кутом 6°.

§6. Кут між дотичною і хордою

Ключова задача.

Кут TAB між дотичною AT і хордою AB (мал. 18) вимірюється половиною градусної міри дуги AmB.



Мал. 18

Розв'язання.

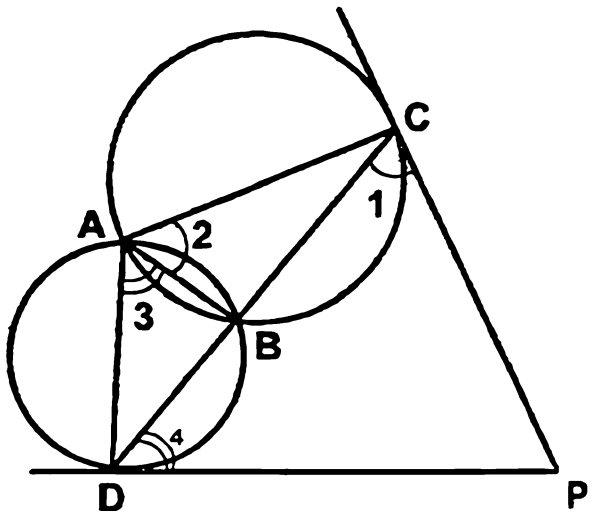
Проведемо діаметр AD. $\angle ABD = 90°$ як вписаний, що спирається на діаметр. Зрозуміло, що $\angle DAT = 90°$. Отже,

$$\angle BAT = \angle ADB = \frac{1}{2} \cup AmB.$$

Приклади

Задача 1.

Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку B проводять пряму, яка перетинає кола в точках C і D, а потім через точки C і D проводять дотичні до цих кіл (мал. 19). Доведіть, що точки A, D, C і P — точки перетину дотичних — лежать на одному колі.



Мал. 19

Доведення.

$$\angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = \angle 4,$$
$$\angle 1 + \angle 4 = 180° - \angle DPC.$$

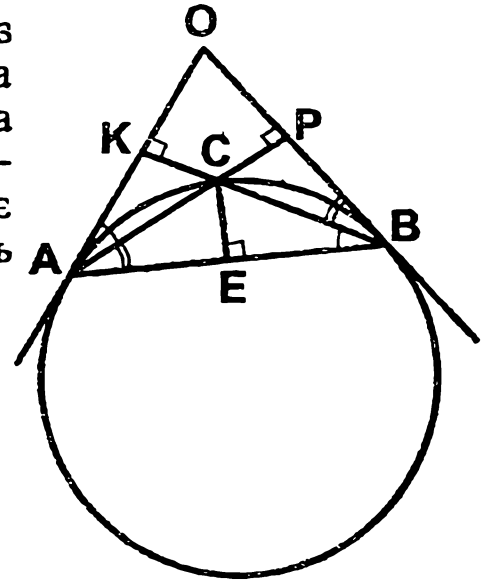
Звідси $\angle 2 + \angle 3 = 180° - \angle DPC$, тобто

$$\angle DAC + \angle DPC = 180°.$$

Таким чином, навколо чотирикутника $DACP$ можна описати коло.

Задача 2.

Коло дотикається сторін кута з вершиною O в точках A і B. На цьому колі всередині трикутника AOB взято точку C. Відстань від точки C до прямих OA і OB дорівнює відповідно a і b. Знайдіть відстань від точки C до хорди AB.



Мал. 20

Розв'язання.

Проведемо $CE \perp AB$ (мал. 20). $\angle OAC = \angle ABC$. Тоді

$\Delta AKC \backsim \Delta BEC$. Звідси

$$\frac{CK}{CE} = \frac{AC}{BC}. \quad \angle CAB = \angle OBC.$$

Тоді $\Delta ACE \backsim \Delta BCP$. Звідси $\frac{CE}{CP} = \frac{AC}{BC}$. З двох пропорцій одержуємо $\frac{CK}{CE} = \frac{CE}{CP}$, тобто

$$CE^2 = CK \cdot CP = ab, \quad CE = \sqrt{ab}.$$

Вправи

6.1. Через кінець хорди, яка ділить коло у відношенні 3:4, проведено дотичну. Визначити гострий кут між дотичною і хордою.

6.2. У трикутник ABC вписано коло. C_1, B_1 і A_1 — точки дотику зі сторонами AB, AC і BC відповідно. $\angle A = 38°$, $\angle B = 86°$. Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$.

6.3. Через точку дотику двох кіл проведено дві січні, кінці яких з'єднано хордами. Доведіть, що ці хорди паралельні.

6.4. Два кола перетинаються в точках P і Q. Через точку A першого кола проведено прямі AP і AQ, які перетинають друге коло в точках B і C. Доведіть, що дотична в точці A до першого кола паралельна BC.

6.5. Кола S_1 і S_2 перетинаються в точках A і P. Через точку A проведено дотичну AB до S_1, а через точку P —

пряму $CD \parallel AB$ ($B \in S_2$, $C \in S_2$, $D \in S_1$). Довести, що $ABCD$ — паралелограм.

6.6. AB — основа рівнобедреного трикутника ABC. Довести, що коло, яке дотикається сторін кута ACB в точках A і B, проходить через точку O — центр вписаного кола трикутника ABC.

6.7. Два кола різних радіусів з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. До цих кіл проведено спільну дотичну. Точки дотику C і D лежать по той же бік від лінії центрів, що й точка B. Знайдіть $\angle O_1AO_2$, якщо $\angle CAD = \alpha$.

6.8. До двох кіл, які перетинаються в точках M і K, проведено спільну дотичну. Доведіть: якщо A і B — точки дотику, то $\angle AMB + \angle AKB = 180°$.

6.9. У трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) на катеті AC побудовано коло, що перетинає AB в точці E. Через точку E проведено дотичну, яка перетинає катет BC в точці D. Доведіть, що трикутник BDE — рівнобедрений.

6.10. Дотична в точці A до кола, що описане навколо трикутника ABC, перетинає BC в точці D, AE — бісектриса трикутника ABC. Доведіть, що $AD = DE$.

6.11. Через центр кола ω_1 проведено коло ω_2. A і B — точки перетину кіл. Дотична до кола ω_2 в точці B перетинає ω_1 в точці C. Доведіть, що $AB = BC$.

6.12. Кола S_1 і S_2 перетинаються в точці A. Через неї проведено пряму, яка перетинає S_1 в точці B, а S_2 в точці C. Через точки C і B проведено дотичні, які перетинаються в точці D. Доведіть, що величина кута BDC постійна.

6.13. Два кола дотикаються одне одного зовнішньо в точці D. Пряма дотикається одного з них у точці A, а друге перетинає в точках B і C. Доведіть, що точка A рівновіддалена від прямих DB і CD.

6.14. З точки C кола на хорду AB проведено перпендикуляр CD. З кінців хорди проведено перпендикуляри AE і BF на дотичну до кола в точці C. Доведіть, що $CD^2 = AE \cdot BF$.

6.15. Два кола перетинаються в точках A і D. AB і AC — хорди, які дотикаються кожного кола. Доведіть, що $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{BD}{DC}$.

6.16. Коло проходить через вершини B, C і D трапеції $ABCD$ і дотикається бічної сторони AB в точці B. Основи трапеції a і b. Знайдіть діагональ BD.

6.17. Навколо трикутника ABC описано коло. Пряма l дотикається кола в точці A. Через точку D сторони AB проведено пряму $DE \parallel l$, $E \in AC$. $AE = 5$, $AD = 6$, $EC = 7$. Знайти BD.

6.18. Через центр O кола, описаного навколо гострокутного трикутника ABC, проведено пряму, яка перпендикулярна CO і перетинає відрізки AC і BC в точках E і F відповідно. Обчисліть довжину відрізка CF, якщо відомо довжини сторін $AC = b$, $BC = a$, і довжина відрізка EC дорівнює d.

6.19. З точки A проведено січну і дотичну до кола радіуса R. Нехай B — точка дотику, а D і C — точки перетину січної з колом, причому точка D лежить між A і C. Відомо, що BD — бісектриса ΔABC, її довжина дорівнює R. Знайдіть відстань від точки A до центра кола.

6.20. З точки поза колом проведено дотичні і січну, причому точки дотику і точки перетину січної з колом є вершинами трапеції. Знайдіть відношення основ трапеції, якщо відомо, що кут між дотичними дорівнює 60°.

6.21. Через точку A кола проведено хорду AB, потім дотичну в точці B. Діаметр, перпендикулярний до радіуса OA, перетинає дотичну в точці C, а хорду (або її продовження) — в точці D. Доведіть, що $BC = CD$.

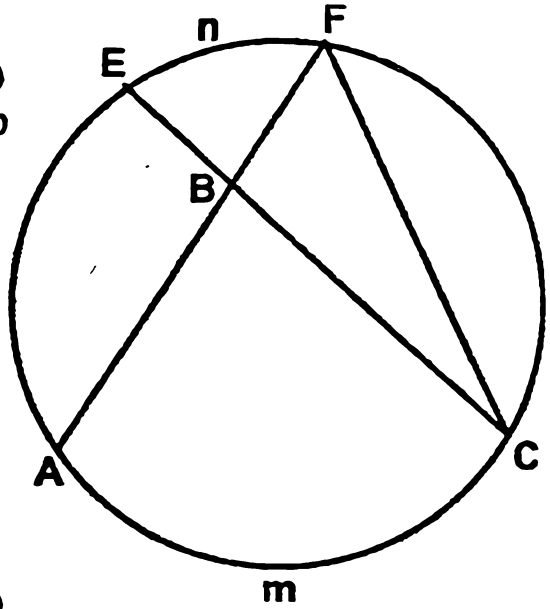
6.22. У кут з вершиною S вписано коло, яке дотикається сторін у точках A і B. M — точка на колі. $MK \perp AB$, $MP \perp AS$, $ME \perp BS$. Доведіть, що $MK^2 = MP \cdot ME$.

6.23. У трикутнику ABC бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці D. Перпендикуляр до цієї бісектриси, проведеної через середину M відрізка AD, перетинає пряму BC в точці N. Доведіть, що пряма NA — дотична до кола, описаного навколо трикутника ABC.

§7. Величина кута, вершина якого лежить всередині кола (поза колом)

Ключова задача 1.

Величина кута ABC (мал. 21) дорівнює півсумі градусних мір дуг AmC і EnF.



Мал. 21

Розв'язання.

Проведемо хорду FC.

$$\angle ABC = \angle AFC + \angle ECF =$$

$$= \frac{1}{2} \cup AmC + \frac{1}{2} \cup EnF.$$

Ключова задача 2.

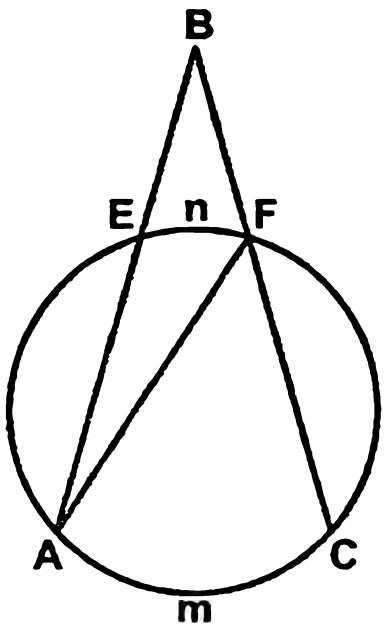
Величина кута ABC (мал. 22) дорівнює піврізниці градусних мір дуг AmC і EnF.

Розв'язання.

Проведемо хорду AF.

$$\angle ABC = \angle AFC - \angle EAF =$$

$$= \frac{1}{2} \cup AmC - \frac{1}{2} \cup EnF.$$



Мал. 22

Приклади

Задача 1.

Через середину C дуги AB проведено дві прямі CD і CE, які перетинають хорду AB в точках H і F. Довести, що навколо чотирикутника $DHFE$ можна описати коло (мал. 23).

Доведення.

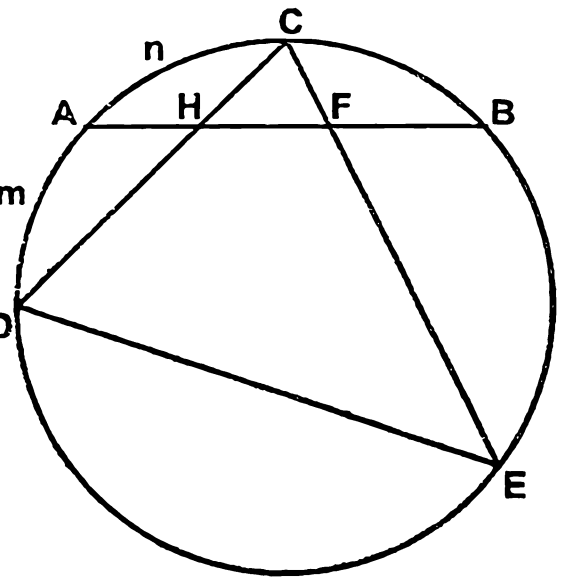
$$\angle DHF = \frac{1}{2}(\cup DEB + \cup AnC) = \frac{1}{2}\left(\cup DEB + \frac{1}{2} \cup ACB\right).$$

$$\angle DEF = \frac{1}{2} \cup DAC = \frac{1}{2}\left(\cup DmA + \frac{1}{2} \cup ACB\right).$$

Звідси $\angle DHF + \angle DEF =$

$= \frac{1}{2}(\smile DEB + \smile DmA +$

$+ \smile ACB) = 180°.$



Мал. 23

Задача 2.

У коло вписано чотирикутник $ABCD$. Його протилежні сторони CD і AB, BC і AD продовжено до взаємного перетину в точках N і F (мал. 24). Доведіть, що бісектриси кутів BFA і AND перпендикулярні.

Доведення.

S — точка перетину бісектрис.

$$\angle ANK = \frac{1}{2}\smile AK - \frac{1}{2}\smile BM;\ \angle KND = \frac{1}{2}\smile KD - \frac{1}{2}\smile MC.$$

Звідси

$\smile MC + \smile AK =$

$= \smile BM + \smile KD.$

Аналогічно доводиться, що

$\smile CP + \smile AE =$

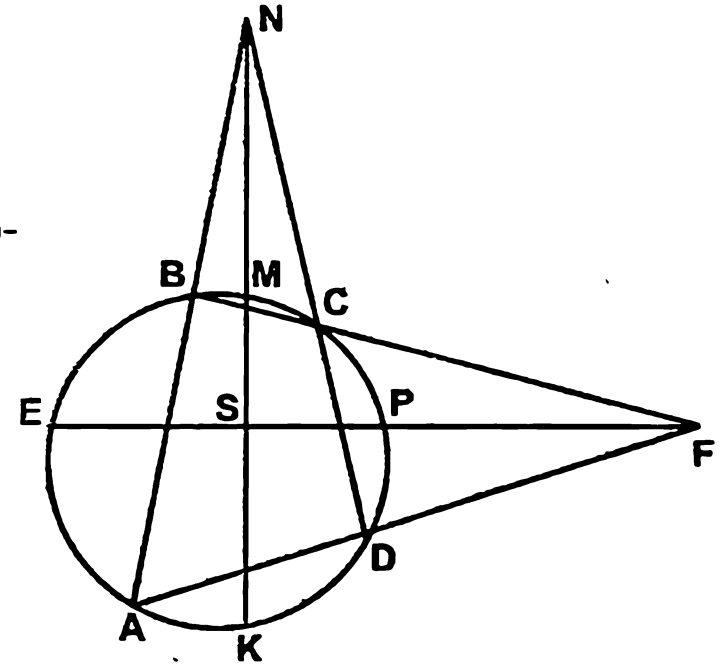
$= \smile PD + \smile BE.$

$\angle MSP =$

$= \frac{1}{2}(\smile MC + \smile CP +$

$+ \smile AE + \smile AK),$

$\angle ESM =$



Мал. 24

$$= \frac{1}{2}(\smile BM + \smile BE + \smile DP + \smile KD)$$

Дістанемо: $\angle MSP = \angle ESM$. Отже,

$$\angle MSP = \angle ESM = 90°.$$

Вправи

7.1. З точки A поза колом проведено січну, яка перетинає коло в точках B і C. Дуга BC має 112°. Дотична AD ділить цю дугу у відношенні 7:9. Знайдіть $\angle BAD$.

7.2. Хорди AB і CD перетинаються в точці M. $\angle AMC = 40°$. Дуга AD більша за дугу BC на 20°. Знайдіть $\smile AD$.

7.3. Коло розділено точками A, B, C і D так, що $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 3 : 2 : 13 : 7$. Хорди AD і BC продовжено до перетину в точці M. Знайдіть $\angle AMB$.

7.4. Діаметр AB і хорда CD перетинаються в точці M. $\angle CMB = 73°$, дуга BC має 110°. Знайдіть градусну міру дуги BD.

7.5. Коло розділено точками A, B, C і D так, що $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 2 : 4 : 5 : 7$. Проведемо хорди AC і BD, вони перетинаються в точці M. Знайдіть $\angle AMB$.

7.6. З кінців дуги AB, яка має 48°, проведено хорди AC і BD так, що $\angle DMC$, утворений перетином хорд, дорівнює $\angle DNC$, де N належить дузі CD. Знайдіть градусну міру дуги CD.

7.7. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці M, а прямі AB і CD — в точці N. $\angle AMD = 108°$, $\angle AND = 24°$. Знайдіть $\angle ABD$ і $\angle BDC$, якщо навколо $ABCD$ можна описати коло.

7.8. У кругу з центром O і радіусом R проведено хорду AB і продовжено її на відстань $BC = R$. Через точки C і O проведено січну CD. Точка C лежить далі від D, ніж від O. Доведіть, що $\angle AOD = 3\angle ACD$.

7.9. На колі чотири точки. Середини утворених дуг попарно сполучені відрізками. Довести, що серед цих відрізків є хоча б два перпендикулярні.

7.10. Навколо трикутника ABC описано коло. AA_1, BB_1, CC_1 — бісектриси кутів трикутника, причому точки A_1, B_1 і

C_1 лежать на колі. Доведіть, що AA_1, BB_1, CC_1 перпендикулярні сторонам трикутника $A_1B_1C_1$.

7.11. Точка M лежить на діаметрі AB кола з центром O. C і D — точки кола по один бік від AB, причому $\angle CMA = \angle DMB$. $\angle CMD = \alpha$. Знайдіть $\angle COD$.

7.12. Довести, що бісектриса зовнішнього кута A трикутника ABC, вписаного в коло, паралельна хорді, яка з'єднує середини дуг AB і AC.

7.13. У колі проведено хорду. На меншій з утворених дуг взято точку і через неї проведено дотичну. Знайдіть на дотичній точку, з якої хорду видно під найбільшим кутом.

7.14. На сторонах опуклого чотирикутника як на діаметрах побудовано чотири круга. Доведіть, що вони повністю покривають чотирикутник.

7.15. По стороні правильного трикутника котиться коло радіуса, який дорівнює його висоті. Доведіть, що кутова величина дуги, що вирізається на колі сторонами трикутника, завжди дорівнює 60°.

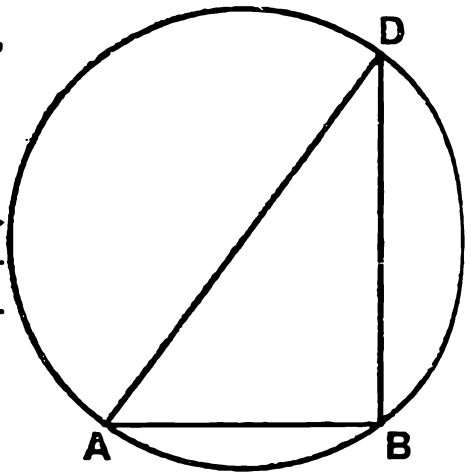
7.16. Діагоналі рівнобедреної трапеції $ABCD$ перетинаються в точці P. Доведіть, що центр O її описаного кола лежить на описаному колі трикутника APB.

7.17. З точки M, взятої поза кругом, проведено до нього дотичні MA і MB. Пряма AD перпендикулярна діаметру BC. Доведіть, що $DE = EA$, де E — точка перетину MC і AD.

§8. Формула $a = 2R \sin \alpha$

Ключова задача.

Хорда кола дорівнює добутку діаметра на синус вписаного кута, який спирається на цю хорду.



Мал. 25

Розв'язання.

Проведемо діаметр AD (мал. 25). $\angle ADB = \alpha$, $\angle ABD = 90°$ як вписаний, що опирається на діаметр. Звідси $AB = AD \sin \alpha$.

Приклади

Задача 1.

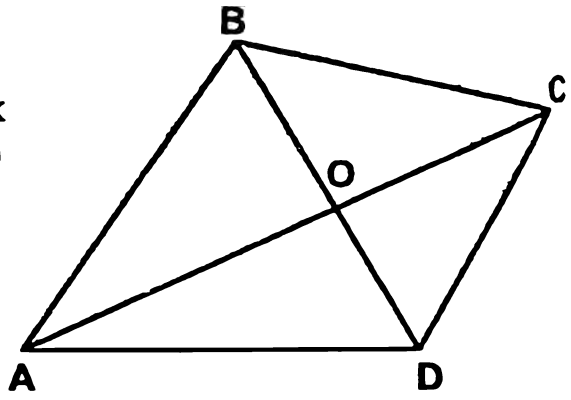
У чотирикутник $ABCD$ вписано коло. Діагоналі його перетинаються в точці O. Нехай R_1, R_2, R_3, R_4 — радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABO, BOC, COD і AOD. Доведіть, что $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$.

Розв'язання.

Зауважимо, що синуси усіх кутів при вершині O (мал. 26) однакові. Тоді

$$R_1 = \frac{AB}{2 \sin \alpha}, \; R_2 = \frac{BC}{2 \sin \alpha},$$

$$R_3 = \frac{CD}{2 \sin \alpha}, \; R_4 = \frac{AD}{2 \sin \alpha}.$$



Мал. 26

Оскільки в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, то $AB + CD = BC + AD$. Звідси випливає справедливість доводжуваної рівності.

Задача 2.

У трикутнику ABC точка M лежить на стороні AB, точка N — на стороні AC. Через точки M, N, B, C проходить коло радіуса $\sqrt{3}$ (мал. 27). Знайдіть довжину відрізка AM, якщо $BC = 3$, $AM : MB = 2 : 1$, $\angle BAC = 30°$.

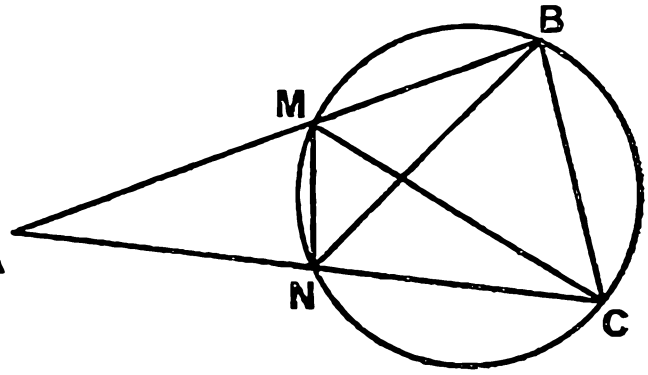
Розв'язання.

$BC = 2R \sin \angle BNC$,

де R — радіус кола, $R = \sqrt{3}$. Звідси

$$\sin \angle BNC = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, $\angle BNC = 120°$ або $\angle BNC = 60°$.



Мал. 27

Якщо $\angle BNC = 120°$, то $\angle ANB = 60°$. Отже, $\angle ABN = 90°$ і MN — діаметр, що суперечить умові. Залишається $\angle BNC = 60°$. Маємо

$$\angle CMB = 60°,\ \angle AMC = 120°,\ \angle MCA = 30°,\ AM = MC.$$

Нехай $MB = x$, тоді $MC = 2x$. До трикутника MBC застосуємо теорему косинусів. $9 = x^2 + 4x^2 - 2x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2}$. Звідси $x = \sqrt{3}$, $AM = MC = 2\sqrt{3}$.

Вправи

8.1. У трикутнику ABC точка M належить відрізку BC. Доведіть, що відношення радіусів описаних кіл навколо трикутників AMB і MAC не залежить від обрання точки M на стороні BC.

8.2. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 36 і 12. Визначити радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 16.

8.3. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R, його кути — α, β, γ. Знайдіть площу трикутника.

8.4. Кути трикутника α і β. Знайдіть відношення його площі до площі описаного круга.

8.5. У коло радіуса R вписано трикутник з кутами $15°$ і $60°$. Знайдіть його площу.

8.6. У рівнобедреній трапеції основи дорівнюють 21 і 9, висота — 8. Знайдіть радіус описаного круга.

8.7. З точки M на колі проведено три хорди: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При цьому $\angle NMP = \angle PMQ$. Знайдіть радіус кола.

8.8. У трикутнику ABC $\angle A = 57°$, $\angle C = 63°$, радіус описаного кола R. AA_1 і CC_1 — висоти. Знайдіть радіуси кіл, описаних навколо трикутників ACC_1 і ACA_1.

8.9. Доведіть, что коло, яке проходить через ортоцентр трикутника і дві його вершини, дорівнює колу, описаному навколо трикутника.

8.10. У трикутнику ABC $\angle A = 37°$, F — точка перетину бісектрис AA_1 і CC_1. Радіуси кіл, описаних навколо трикутників BA_1C_1 і FC_1A_1, рівні. Знайдіть кут C.

8.11. Кут B трикутника ABC дорівнює 60°. Радіус описаного кола дорівнює 2. Знайдіть радіус кола, що проходить через A і C і центр кола, вписаного в трикутник ABC.

8.12. Дано квадрат $ABCD$. O — центр кола, вписаного в трикутник ABC. Промінь AO перетинає коло, описане навколо квадрата, у точці T. Знайдіть відношення $BC : BT$.

8.13. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, на відрізки 5 і 3, рахуючи від вершини. Знайти радіус описаного кола.

8.14. З точки M, яка рухається по колу, опускаються перпендикуляри на фіксовані діаметри AB і DC. Доведіть, що довжина відрізка, який з'єднує основи перпендикулярів, не залежить від обрання точки M.

8.15. Перпендикуляр, проведений до сторони AB трикутника ABC в її середині, перетинає висоту, проведену з вершини B, в точці K, а серединний перпендикуляр до сторони BC перетинає цю саму висоту в точці M. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює R. $BK = a$. Знайдіть BM.

8.16. Чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, вписано в коло. N — точка перетину діагоналей чотирикутника, $AD : BC = 1 : 2$, R — радіус описаного кола. Знайдіть відношення $BC : R$.

8.17. У коло радіуса R вписано трапецію $ABCD$ з гострим кутом при основі AD, який дорівнює α. Відомо, що бісектриса кута C проходить через центр описаного кола. Знайдіть площу трапеції.

8.18. У трикутнику ABC кут B дорівнює 120°. На стороні AB взято точку M, на стороні BC — точку N так, що $AM = 2MB$, $CN = 2BN$. Навколо чотирикутника $AMNC$ описано коло радіуса 1. Знайдіть площу трикутника ABC.

8.19. Дано трикутник зі сторонами $AB = 4$, $BC = 3$ і $AC = 5$. На стороні AB взято точку D так, що $DB = \frac{7}{8}$. Через точки C, D і B проведено коло, що перетинає AC в точці E. Знайдіть довжину відрізка BE.

8.20. На стороні AC гострокутного трикутника ABC знайдіть таку точку, щоб відстань між її проекціями на дві інші сторони була найменшою.

8.21. Прямокутник $ABCD$ вписано в коло. Бісектриса кута A перетинає це коло в точці K, а сторону BC в точці P. Відомо, що $BK = 2BP$. Знайдіть відношення $BP : BC$.

8.22. Протилежні сторони вписаного чотирикутника дорівнюють a і b. Кут між діагоналями, повернутий до заданих сторін, дорівнює α. Знайдіть радіус описаного кола.

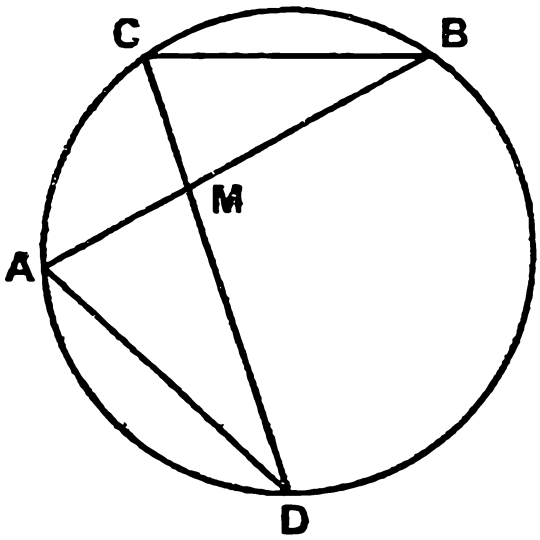
8.23. Два кола радіусів R і r перетинаються в точках A і B і дотикаються до прямої в точках C і D. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ACD.

8.24. Навколо трикутника ABC описано коло. З довільної точки M кола проведено перпендикуляри MN і MK до прямих AB і AC відповідно. Для якої точки M довжина відрізка NK є максимальною?

§9. Властивості хорд, що перетинаються

Ключова задача.

Хорди кола AB і CD перетинаються в точці M (мал. 28). Довести, що $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.



Мал. 28

Доведення.

Оскільки вписані кути ABC і ADC спираються на дугу AC і $\angle AMD = \angle CMB$, то трикутники ADM і CBM подібні. Тоді

$$\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB},$$

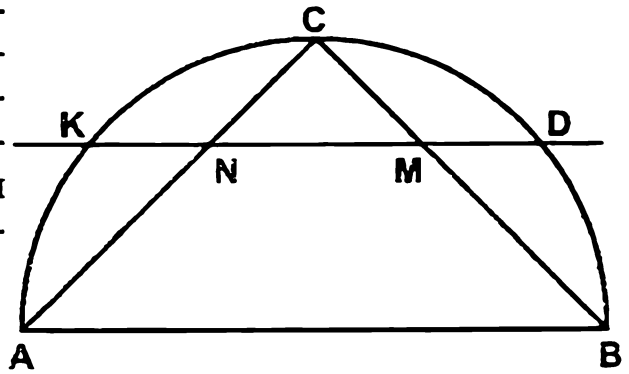
звідси

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Приклади

Задача 1.

Середину півкола з'єднано з кінцями діаметра і через середини з'єднуючих відрізків проведено хорду. Кожний з бічних відрізків хорди дорівнює c. Знайди радіус кола.



Мал. 29

Розв'язання.

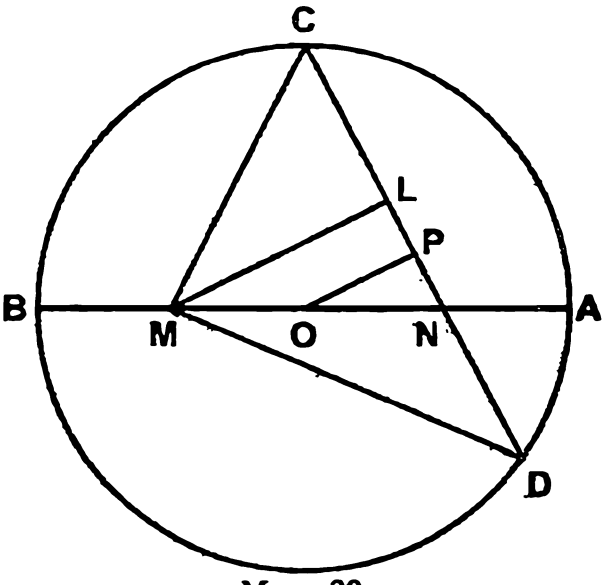
Нехай $AB = 2R$ (мал. 29). Оскільки $AC = CB$ і $\angle ACB = 90°$, то $AC = R\sqrt{2}$. MN — середня лінія трикутника ACB. Тоді $NM = R$. Одержуємо:

$$KN \cdot ND = AN \cdot NC.$$

Звідси $\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = c\,(R + c)$. Розв'язуючи одержане рівняння, матимемо відповідь $c\,(\sqrt{3} + 1)$.

Задача 2.

У кругу з центром O радіуса R проведено діаметр AB і через середину радіуса AO — хорду CD, яку видно з середини радіуса OB під прямим кутом. Знайти відстань від центра кола до хорди CD.



Мал. 30

Розв'язання.

Проведемо перпендикуляри з точок M і O до хорди CD (мал. 30). OP — середня лінія трикутника MNL, отже, $OP = \frac{1}{2}ML$ і $LP = PN$. Окрім того, $CP = PD$ і $CL = ND$, $LD = CN$.

З прямокутного трикутника CMD

$$ML^2 = CL \cdot LD = ND \cdot CN = BN \cdot NA.$$

Враховуючи, що $BN = \frac{3R}{2}$ і $NA = \frac{R}{2}$, маємо:

$$ML = \frac{R\sqrt{3}}{2} \text{ і } OP = \frac{R\sqrt{3}}{4}.$$

Відповідь: $R\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Вправи

9.1. Перпендикуляр з точки кола на радіус, що дорівнює 34 см, ділить його у відношенні 8:9, рахуючи від центра. Визначити довжину перпендикуляра.

9.2. Медіану, яка виходить з вершини A трикутника ABC, продовжено до перетину в точці A' з описаним колом. Знайти довжину AA', якщо медіана дорівнює m, а сторона $BC = a$.

9.3. Середину D півкола з'єднано з кінцями діаметра AC. Хорда BE паралельна AC і ділиться хордами AD і DC на три однакові частини. M — точка перетину хорд AD і BE. Знайти довжину відрізка DM, якщо $AD = a$.

9.4. Дано точку P, віддалену на 7 см від центра кола радіуса 11 см. Через цю точку проведено хорду довжиною 18 см. Визначити довжини відрізків, на які ділиться хорда точкою P?

9.5. У коло вписано рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 10 см, а бічна сторона — 12 см. Через середину висоти трикутника проведено хорду, паралельну його основі. Знайти довжину хорди.

9.6. У коло вписано трикутник, одна із сторін якого дорівнює 21 см. Паралельно цій стороні, через точку перетину медіан, проведено хорду. Відрізки хорди, які розміщені поза трикутником, дорівнюють 8 і 11 см. Визначити невідомі сторони трикутника.

9.7. У коло вписано трикутник ABC, і в ньому проведено медіани AF і BK. Медіану AF продовжено до перетину з колом у точці D. Визначити сторони AC і BC, якщо $BK = 63$ см, $AF = 45$ см і $FD = 24{,}2$ см.

9.8. Два відрізки AB і CD перетинаються в точці M так, що $MA = 7$ см, $MB = 21$ см, $MC = 3$ см, $MD = 16$ см. Чи лежать точки A, B, C, D на одному колі?

9.9. Через точку P, яка лежить на спільній хорді AB двох кіл, що перетинаються, проведено хорду KM першого кола і хорду LN другого кола. Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ вписаний.

9.10. Довести, що з усіх хорд, котрі проходять через задану точку, що розміщена всередині кола, але не є її центром, найменшою є та, яка цією точкою ділиться навпіл.

9.11. Висоти AD і BE гострокутного трикутника ABC з ортоцентром H продовжено до перетину з описаним колом у точках D_1 і E_1. $AH = HD_1$, $BH = EE_1$. Знайти кути трикутника ABC.

9.12. Сторона AB трикутника ABC є хордою окремого кола. Сторони AC і BC лежать усередені кола, продовження AC перетинає коло в точці D, а продовження BC — в точці E. Знайти радіус кола, якщо $AB = AC = CD = 2$ і $CE = \sqrt{2}$.

9.13. Медіану AD трикутника ABC продовжили до перетину з описаним колом у точці E. Знайти кути трикутника ABC, якщо відомо, що $4AD = 2AB = AE$.

9.14. AC і BD — діагоналі ромба $ABCD$. Коло, описане навколо трикутника ABD, перетинає більшу діагональ AC в точці E. Визначити діагоналі ромба, якщо $AB = 20$ см, а $CE = 7$ см.

9.15. Рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) вписано в коло, і його медіану AD продовжено до перетину з колом у точці E. $AD = 27$ см, $DE = 16\frac{1}{3}$ см. Визначити сторони трикутника.

9.16. Навколо трикутника ABC описано коло. Медіану AD продовжено до перетину з цим колом у точці E. Відомо, що $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60°$, $AE = 6$. Знайти площу трикутника ABC.

9.17. Навколо трикутника ABC описано коло, в якому через точку перетину бісектрис трикутника проведено хорду, паралельну стороні AC. Сторона AB дорівнює 30 см і ділить хорду на відрізки, що дорівнюють 8 см і 25 см. Визначити невідомі сторони трикутника.

9.18. Усередині кола проведено дві хорди, які перетинаються так, що точка їх перетину віддалена від центра кола на $\frac{3}{5}$ його радіуса і ділить хорди у відношеннях 1:1 і 4:9. Знайти кут між хордами.

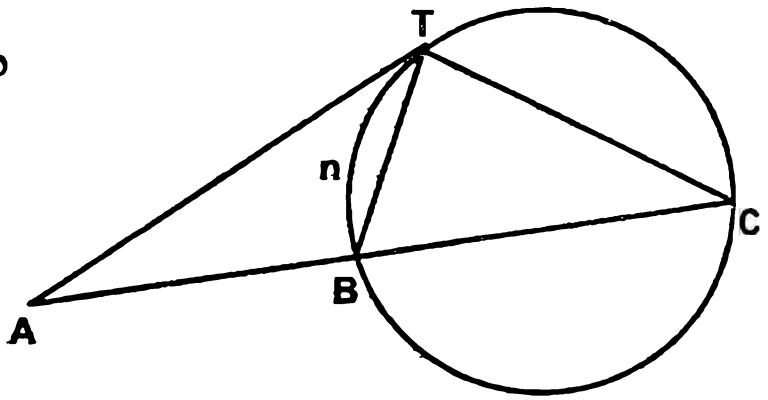
9.19. На колі взято точку K і з центром у точці K проведено коло, що дотикається до діаметра першого кола в точці E й перетинає його в точках P і M. Довести, що PM ділить KE навпіл.

§10. Дотична і січна, проведені до кола з однієї точки

Ключова задача.

AT — дотична до кола (мал. 31). Тоді

$$AT^2 = AC \cdot AB.$$



Мал. 31

Розв'язання.

$$\angle ATB = \frac{1}{2}\smile TnB,$$

$$\angle TCB = \frac{1}{2}\smile TnB.$$

Таким чином,

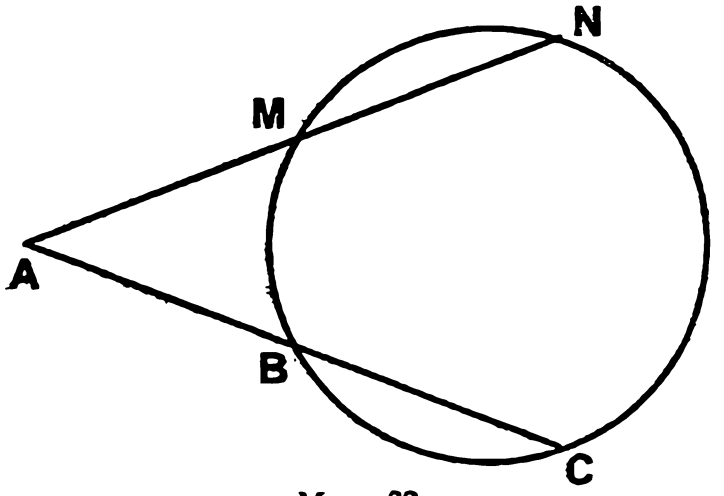
$$\angle ATB = \angle TCB.$$

Отже,

$$\Delta ATB \backsim \Delta ATC.$$

Звідси $\frac{AT}{AC} = \frac{AB}{AT}$,

тобто $AT^2 = AC \cdot AB$.



Мал. 32

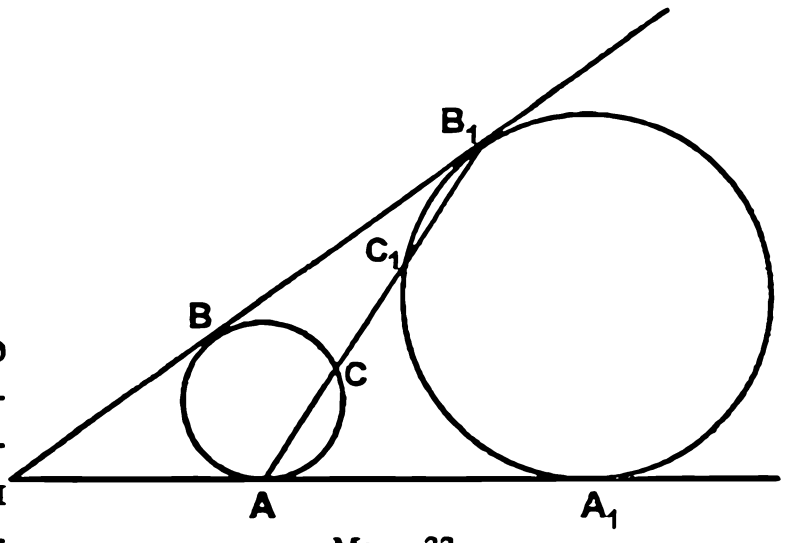
Наслідок.

$AB \cdot AC = AM \cdot AN$
(мал. 32).

Приклади

Задача 1.

У кут вписано два кола. A і B — точки дотику першого кола зі сторонами кута, A_1 і B_1 — другого. Відрізок AB_1 перетинає ці кола в точках C і C_1. Доведіть, що $AC = B_1C_1$ (мал. 33).



Мал. 33

Розв'язання.

Зрозуміло, що $AA_1 = BB_1$. Маємо:

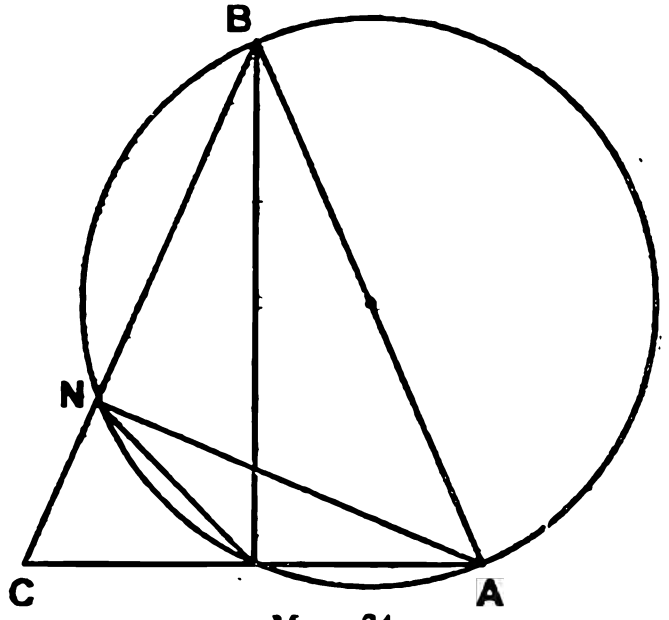
$$AA_1^2 = AB_1 \cdot AC_1 = (AC + CC_1 + C_1B_1)(AC + CC_1),$$

$$BB_1^2 = B_1A \cdot B_1C = (B_1C_1 + C_1C + CA)(B_1C_1 + C_1C).$$

Звідси $AC + CC_1 = B_1C_1 + CC_1$, тобто $AC = B_1C_1$.

Задача 2.

На бічній стороні AB рівнобедреного трикутника як на діаметрі побудовано коло. Коло перетинає основу AC в точці M і бічну сторону BC в точці N. Знайдіть довжини відрізків MN і NC, якщо $AC = a$ і $AB = b$.



Мал. 34

Розв'язання.

Оскільки AB — діаметр кола, то $\angle AMB = 90°$ (мал. 34). Тоді BM — висота рівнобедреного трикутника. Звідси $AM = \frac{a}{2}$, $\angle NBM = \angle MBA$.

Отже, $\smile MN = \smile MA$ і $MN = MA = \frac{a}{2}$. Маємо: $CN \cdot CB = CM \cdot CA$. Звідси $CN = \frac{a^2}{2b}$.

Вправи

10.1. Із зовнішньої точки до кола проведено січну, яка проходить через її центр, і дотичну, яка дорівнює половині січної. Довести, що відрізок дотичної відноситься до радіуса як 4:3.

10.2. З точки A, взятої поза кругом, проведено дві січні ABC і ADE (AB і AD — зовнішні відрізки січних) і хорди BD і EC. Доведіть, що $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$.

10.3. З точки A, що не лежить на колі, проведено до нього дотичну і січну. Відстань від точки A до точки дотику дорівнює 16 см, а до однієї з точок перетину січної з колом — 32 см. Знайдіть радіус кола, якщо січна віддалена від його центра на 5 см.

10.4. Із зовнішньої точки проведено до кола січну довжиною 12 см і дотичну, довжина якої складає $\frac{2}{3}$ внутрішнього відрізка січної. Визначте довжину дотичної.

10.5. На одній із сторін прямого кута вибрано дві точки: одну на відстані 6, другу — 24 від вершини. Проведено коло, що проходить через обрані точки і дотикається іншої сторони кута. Знайдіть відстань від вершини кута до точки дотику.

10.6. Через вершину A гострого кута рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено коло, яке проходить через середину гіпотенузи і дотикається до прямої BC. Знайдіть радіус цього кола, якщо довжина катета дорівнює a.

10.7. З точки A, що знаходиться поза кругом з центром у точці O радіуса R, проведено січну ACB (C лежить між A і B). Коло, побудоване на відрізку BC як на діаметрі, дотикається до відрізка AO в точці D. Знайдіть довжину відрізка AD, якщо $AO = a$.

10.8. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. На відрізках гіпотенузи, визначених основою перпендикуляра, проведеного на гіпотенузу, описано півкола. Знайдіть довжини відрізків катетів, які знаходяться всередині цих півкіл.

10.9. Коло дотикається сторони BC трикутника ABC в його середині, проходить через A, а відрізки AB і AC перетинає відповідно в точках D і E. Знайти кут BAC, якщо $BC = 12$, $AD = 3{,}5$, $EC = \frac{9}{\sqrt{5}}$.

10.10. Бічна сторона рівнобедреного трикутника є діаметром кола, яке відсікає від другої бічної сторони відрізок, що дорівнює $\frac{36}{7}$, а від основи відрізок, який дорівнює 6 (відрізки знаходяться поза колом). Визначте медіану, проведену до бічної сторони трикутника.

10.11. На одній із сторін трикутника, що дорівнює 12, як на діаметрі побудовано коло, яке відсікає від двох інших сторін відрізки, що дорівнюють 1 і 1,25 (відрізки знаходяться поза колом). Визначте невідомі сторони трикутника.

10.12. Два кола радіусів R і r $(R > r)$ дотикаються зовнішньо в точці A. Через точку B, взяту на більшому колі, проведено дотичну BC до меншого кола. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо хорда $AB = a$.

10.13. Два кола радіусів R і r $(R > r)$ дотикаються внутрішньо в точці A. Через точку B, взяту на більшому колі, проведено дотичну BC до меншого кола. Визначте довжину відрізка AB, якщо $BC = a$.

10.14. Коло радіуса R з центром O проходить через вершини A і B трикутника ABC, перетинає відрізок BC в точці M і дотикається AC в точці A. Знайдіть CM, якщо $\angle ACO = \alpha$, $\angle MAB = \beta$.

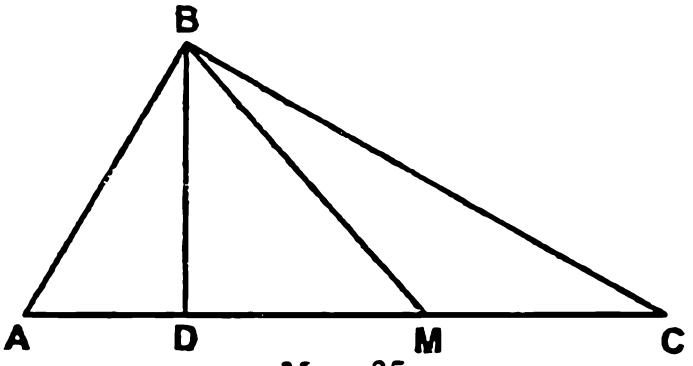
10.15. Точка B лежить між точками A і C. На AB і AC як на діаметрах побудовано кола. До відрізка AC в точці B проведено перпендикуляр до перетину з більшим колом у точці D. З точки C проведено дотичну CK до меншого кола. Доведіть, що $CD = CK$.

§11. Відношення площ трикутників, які мають спільну висоту (основу)

Ключова задача 1.

Нехай M — довільна точка сторони AC трикутника ABC. Тоді

$$S_{ABM} : S_{MBC} = AM : MC.$$



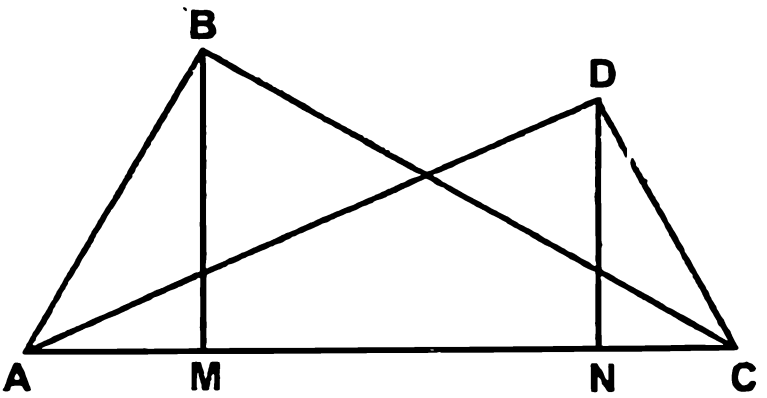
Мал. 35

Розв'язання.

Проведемо висоту BD трикутника ABC (мал. 35). Відрізок BD також буде висотою трикутників MBC і ABM. Маємо: $S_{ABM} = \frac{1}{2} BD \cdot AM$, $S_{MBC} = \frac{1}{2} BD \cdot MC$. Звідси $S_{ABM} : S_{MBC} = AM : MC$.

Ключова задача 2.

Площі трикутників ABC і ADC (мал. 36) відносяться як висоти, проведені до основи AC.



Мал. 36

Розв'язання.

Проведемо висоти BM і DN трикутників ABC і ADC. Тоді

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BM \cdot AC,$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} DN \cdot AC.$$

Звідси $S_{ABC} : S_{ADC} = BM : DN$.

Приклади

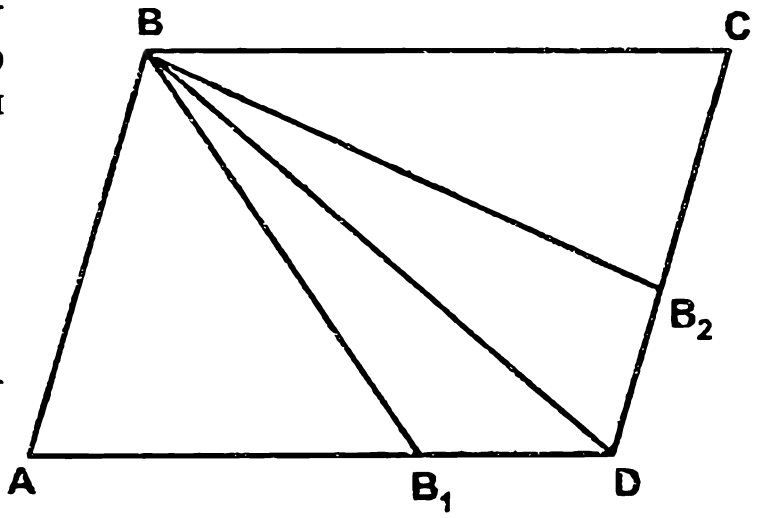
Задача 1.

Даний паралелограм поділіть на три рівновеликі частини прямими, що виходять з однієї вершини.

Розв'язання.

Нехай BB_1 і BB_2 — шукані прямі (мал. 37). Якщо площа паралелограма S, то $S_{ABB_1} = \frac{1}{3}S$, $S_{ABD} = \frac{1}{2}S$. Оскільки трикутники ABB_1 і ABD мають спільну висоту, то їх площі відносяться як основи, тобто

$$AB_1 : AD = \frac{1}{3}S : \frac{1}{2}S = 2 : 3.$$



Мал. 37

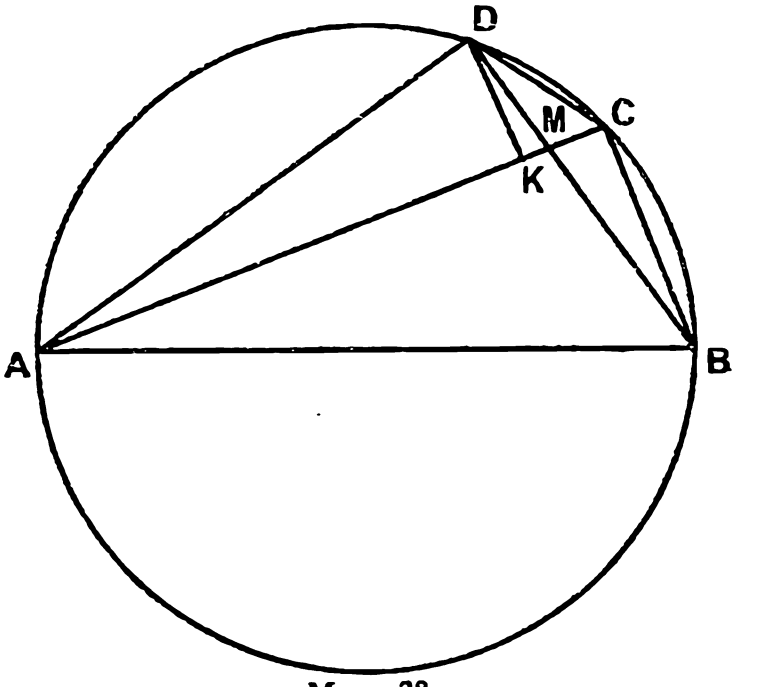
Аналогічно доводиться, що

$$CB_2 : CD = 2 : 3.$$

Звідси випливає алгоритм побудови: розділити кожну із сторін AD і DC паралелограма у відношенні 2:1, рахуючи від вершин A і C.

Задача 2.

У коло вписано чотирикутник $ABCD$, причому AB є діаметром кола. Діагоналі AC і BD перетинаються в точці M (мал. 38). Відомо, що $BC = 3$, $CM = \frac{3}{4}$, а площа трикутника ABC втричі більша за площу трикутника ACD. Знайдіть довжину відрізка AM.



Мал. 38

Розв'язання.

Зрозуміло, що $\angle ACB = 90°$, отже, BC — висота трикутника ACB. Проведемо $DK \perp AC$. Оскільки трикутники ADC

і ABC мають спільну основу, то їх площі відносяться як висоти. Звідси $S_{ABC} : S_{ACD} = BC : DK$. Отже, $BC : DK = 3 : 1$, тобто $DK = \frac{1}{3}BC = 1$. Нехай $\angle MBC = \alpha$. Тоді з трикутника MCB $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$. $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$. Оскільки $\angle ADB = 90°$ і $DK \perp AM$, то $\angle KDM = \alpha$. Маємо

$$AM = AK + KM = DK \operatorname{ctg}\alpha + DK \operatorname{tg}\alpha = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}.$$

Вправи

11.1. Доведіть, що медіана трикутника ділить його на дві рівновеликі частини.

11.2. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) M — точка перетину діагоналей. Доведіть, що $S_{ABM} = S_{MCD}$.

11.3. Середину однієї з діагоналей опуклого чотирикутника з'єднано з кінцями іншої. Доведіть, що одержана ламана ділить чотирикутник на дві рівновеликі частини.

11.4. Якщо діагональ опуклого чотирикутника ділить другу діагональ навпіл, то вона ділить навпіл і площу чотирикутника. Довести.

11.5. Поділіть даний трикутник на три рівновеликі трикутники прямими, які виходять з однієї вершини.

11.6. У трикутнику ABC на медіані BM взято точку K так, що $BK : KM = 1 : 2$. Знайдіть відношення площ трикутників ABK і ABC.

11.7. Площа трапеції ділиться діагоналлю у відношенні 3:7. В якому відношенні вона ділиться середньою лінією, рахуючи від меншої основи?

11.8. У прямокутнику $ABCD$ точка K ділить сторону AB у відношенні $AK : KB = 3 : 4$, а точка M ділить сторону CD у відношенні $DM : MC = 5 : 3$. В якому відношенні KM ділить площу прямокутника?

11.9. У трикутнику ABC точка M ділить сторону AC у відношенні $AM : MC = m : n$. K — довільна точка відрізка BM. Доведіть, що площі трикутників ABK і BKC відносяться як $m : n$.

11.10. Усередині трикутника ABC обрано точку M так, що площі трикутників AMB, BMC, AMC рівні. Доведіть, що M — точка перетину медіан.

11.11. На прямій, що з'єднує середини основ трапеції, взято точку і сполучено з усіма вершинами трапеції. Довести, що трикутники, прилеглі до бічних сторін трапеції, рівновеликі.

11.12. У трапеції $ABCD$ на бічній стороні AB взято точку M так, що $MB : AM = m$. Знайдіть відношення площі трикутника BCD до площі трикутника MBD, якщо відношення довжин основ BC і AD дорівнює k.

11.13. Через середину висоти рівнобедреного трикутника проведено дві прямі, що з'єднують її з вершинами основи. Яку частину площі трикутника складає кожна з 6 частин, на які ці дві прямі розрізають трикутники?

11.14. У рівнобічному трикутнику ABC, площа якого дорівнює S, відкладено від вершини B на сторонах BA і BC відрізки $BM = BN = \frac{1}{3}AB$. Точки M і N сполучені з точками A і C. Відрізки AN і CM перетинаються в точці D. Знайдіть площу чотирикутника $MBND$.

11.15. Довжина бічної сторони трапеції дорівнює a, а відстань від неї до середини протилежної сторони дорівнює b. Знайдіть площу трапеції.

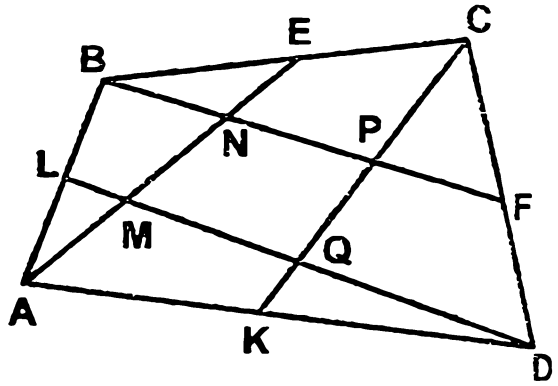
11.16. У трикутнику ABC з точки E сторони BC проведено пряму, паралельну висоті BD, яка перетинає сторону AC в точці F. Відрізок EF ділить трикутник ABC на дві рівновеликі частини. Знайдіть довжину відрізка EF, якщо $BD = 6$, $AD : DC = 2 : 7$.

11.17. Через вершину B трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна бісектрисі кута C і перетинає продовження сторони AC в точці D. Нехай E — середина відрізка BD. Визначте, в якому відношенні пряма AE ділить площу трикутника ABC, якщо відомо, що довжина сторони AC дорівнює b, а довжина сторони BC дорівнює a.

11.18. Дано трикутник ABC. Продовжимо його сторону AB за вершину B таким відрізком BP, що $BP = AB$; сторону AC — за вершину A таким відрізком AM, що $AM = CA$; сторону BC — за вершину C таким відрізком KC, що $KC = BC$. У скільки разів площа трикутника PKM більша за площу трикутника ABC?

11.19. На продовженні сторін AB, BC, CD і DA чотирикутника $ABCD$ відповідно за точки B, C, D і A відкладено відрізки $BB_1 = AB$, $CC_1 = BC$, $DD_1 = CD$, $AA_1 = DA$. Знайдіть площу чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, якщо площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює S.

11.20. E, F, K, L — середини сторін чотирикутника $ABCD$ (мал. 39). Доведіть, що сума площ трикутників ALM, BNE, CPF, KQD дорівнює площі чотирикутника $MNPQ$.



Мал. 39

11.21. В трикутнику ABC проведено медіану BD, а через її середину і вершину A — пряму l. Внаслідок такої побудови трикутник поділено на три трикутники і один чотирикутник. Знайдіть площі цих фігур, якщо площа трикутника ABC дорівнює S.

11.22. На стороні AB трикутника ABC взято точку D, яка ділить її у відношенні $m : n$, рахуючи від вершини A, а на стороні BC точки E і F, які ділять її у відношенні $p : q : r$, рахуючи від вершини B. Знайдіть відношення площ трикутників DEF і ABC.

11.23. У трикутнику ABC точки K і N — середини сторін AB і AC відповідно. Через точку B проведено пряму, яка перетинає AC в точці F, а KN — в точці L так, що $KL : LN = 3 : 2$. Визначте площу чотирикутника $AKLF$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 40.

11.24. Діагональ опуклого чотирикутника ділить навпіл відрізок, який з'єднує середини двох протилежних сторін цього чотирикутника. Доведіть, що ця діагональ ділить навпіл площу чотирикутника.

11.25. Дано опуклий n-кутник. Побудувати рівновеликий йому опуклий $(n - 1)$-кутник.

11.26. У трикутник ABC вписано коло з центром O. Пряма BO перетинає це коло в точках M і N, а відрізки AO і CO перетинають це коло відповідно в точках P і Q. Знайдіть відношення площ трикутників MPN і MQN, якщо $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$.

§12. Відношення площ подібних трикутників

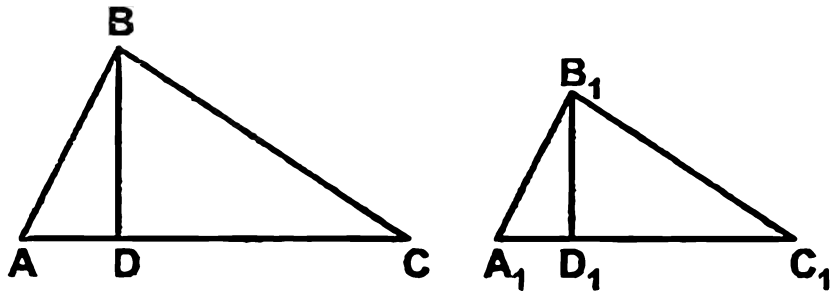
Ключова задача.

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Розв'язання.

Нехай $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ і коефіцієнт подібності дорівнює k. Проведемо висоти BD і B_1D_1 (мал. 40). Маємо:

$$BD = k \cdot B_1D_1,\ AC = k \cdot A_1C_1.$$



Мал. 40

Тоді $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{\frac{1}{2}BD \cdot AC}{\frac{1}{2}B_1D_1 \cdot A_1C_1} = \dfrac{k \cdot B_1D_1 \cdot k \cdot A_1C_1}{B_1D_1 \cdot A_1C_1} = k^2.$

Приклади

Задача 1.

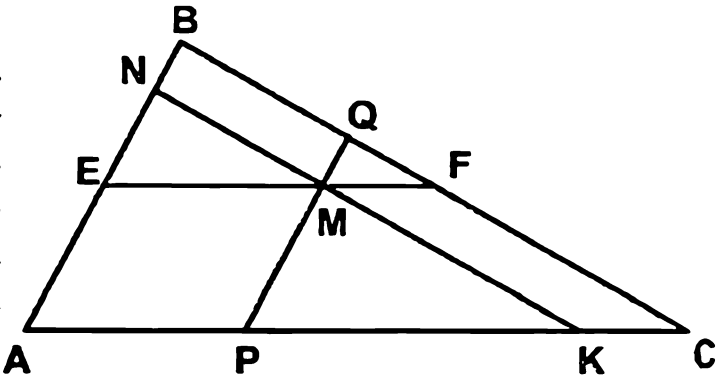
У чотирикутнику $ABCD$ сторона AB дорівнює стороні BC, діагональ AC дорівнює стороні CD, а кут ABC дорівнює куту ACD. Радіуси кіл, вписаних у трикутники ABC і ACD, відносяться як 3:4. Знайдіть відношення площ цих трикутників.

Розв'язання.

Оскільки трикутники ABC і ACD рівнобедрені і їх кути при вершинах рівні, то вони подібні. Радіуси їх вписаних кіл відносяться як 3:4, отже, коефіцієнт подібності дорівнює $k = \frac{3}{4}$. Тоді площі цих трикутників відносяться як $k^2 = \frac{9}{16}$.

Задача 2.

Усередині трикутника ABC обрано точку M. Через цю точку проведено прямі, паралельні сторонам трикутника (мал. 41). Площі трьох утворених трикутників дорівнюють S_1, S_2, S_3. Знайдіть площу трикутника ABC.



Мал. 41

Розв'язання.

Зрозуміло, що названі в умові трикутники подібні трикутнику ABC. Нехай $S_{ENM} = S_1$, $S_{MQF} = S_2$, $S_{PMK} = S_3$, $S_{ABC} = S$. Маємо: $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{EM}{AC}$, $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{PK}{AC}$, $\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{MF}{AC}$. Звідси

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{EM + PK + MF}{AC} = \frac{AP + PK + KC}{AC} = 1,$$

тобто $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Вправи

12.1. У прямокутному трикутнику катети відносяться як 3:4, а висота, проведена до гіпотенузи, ділить площі трикутника на частини, різниця яких дорівнює 84 см^2. Знайдіть площу всього трикутника.

12.2. Площу прямокутного трикутника поділено навпіл прямою, перпендикулярною до гіпотенузи. Знайдіть відстань між цією прямою і вершиною меншого з гострих кутів, якщо більший катет дорівнює 20 см.

12.3. Через середину E висоти BD рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) проведено пряму $MN \parallel AB$, M належить AC, N належить BC. Знайдіть площу трикутника CMN, якщо площа трикутника ABC дорівнює 32.

12.4. Провести пряму, паралельну основі даного трикутника і таку, що ділить його на дві рівновеликі частини.

12.5. Висота гострокутного трикутника дорівнює 4. Вона ділить основу на дві частини, що відносяться як 1:8. Знайти

довжину відрізка, який паралельний висоті і ділить трикутник на дві рівновеликі частини.

12.6. Висота, проведена на гіпотенузу прямокутного трикутника, ділить його на два трикутника, площі яких 6 і 54. Знайдіть гіпотенузу.

12.7. Основа трикутника ділиться висотою на відрізки, довжини яких 14 і 36. Перпендикулярно до основи проведено пряму, яка ділить площу даного трикутника навпіл. На які частини ця пряма поділила основу трикутника?

12.8. В якому відношенні, рахуючи від вершини, треба поділити бічну сторону трикутника двома прямими, паралельними основі, щоб площа трикутника була поділена на три рівновеликі частини?

12.9. З середини основи трикутника проведено прямі, паралельні сторонам. Доведіть, що площа утвореного паралелограма удвічі менша за площу трикутника.

12.10. На стороні AC трикутника ABC взято точку E, через яку проведено прямі $EF \parallel AB$ і $ED \parallel BC$. Доведіть, що $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

12.11. Точки D і E, K і L, M і N ділять відповідно сторони AC, CB і BA трикутника ABC на три однакові частини. Доведіть, що площа чотирикутника, утвореного перетином прямих BD, BE, KN і LM, дорівнює $\frac{1}{9}$ площі трикутника ABC.

12.12. Основи трапеції відносяться як $m : n$. Знайти, в якому відношенні ділиться площа трапеції її діагоналями.

12.13. Площа трикутника дорівнює a. Кожну сторону трикутника поділено у відношенні $m : n : m$. Визначити площу шестикутника, вершинами якого є точки ділення.

12.14. Із зовнішньої точки A до кола проведено дотичну AB і січну ACD. $AC : AB = 2 : 3$. Площа трикутника ABC дорівнює 20. Знайдіть площу трикутника ABD.

12.15. У трикутнику ABC $MN \parallel AC$, $KN \parallel AB$. Площі трикутників BMN і NKC рівні відповідно S_1 і S_2. Знайдіть площу трикутника ABC.

12.16. У трикутнику ABC з вершини A проведено пряму, яка перетинає сторону BC в точці D, що знаходиться між точками B і C, причому $CD:BC=\alpha$ $\left(\alpha<\frac{1}{2}\right)$. На стороні BC між точками B і D взято точку E так, що $CD=DE$, і через неї проведено пряму, яка паралельна AC і перетинає AB в точці F. Знайдіть відношення площ трапеції $ACEF$ і трикутника ADC.

12.17. У квадраті кожну вершину сполучено з серединою сторони, яка лежить між двома вершинами (рахуючи вершини в однаковому порядку). Сполучні прямі утворюють своїм перетином квадрат. Доведіть, що його площа становить $\frac{1}{5}$ площі даного квадрата.

12.18. Усередині опуклого чотирикутника $ABCD$ обрано точку M. Її симетрично відображено відносно середин T_1, T_2, T_3, T_4 його сторін. Одержані точки M_1, M_2, M_3, M_4 сполучені так, що утворився опуклий чотирикутник. Доведіть, що його площа не залежить від обрання точки M.

12.19. Дано паралелограм $ABCD$. Пряма, яка проходить через вершину C, перетинає прямі AB і AD в точках K і L. Площі трикутників KBC і CDL дорівнюють P і Q. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$.

12.20. У трикутнику ABC через основу D висоти BD проведено пряму, яка паралельна стороні AB і перетинає сторону BC в точці K. Знайдіть відношення $\frac{BK}{KC}$, якщо площа трикутника BDK становить $\frac{3}{16}$ площі трикутника ABC.

12.21. Відрізок AB є діаметром круга, а точка C лежить поза цим кругом. Відрізки AC і BC перетинаються з колом відповідно у точках D і M. Знайдіть кут CBD, якщо площі трикутників DCM і ACB відносяться як 1:4.

12.22. У трикутнику ABC кут C дорівнює 30°, а кут A — гострий. Перпендикулярно до сторони BC проведено пряму, яка відсікає від трикутника ABC трикутник CNM (точка N лежить між B і C). Площі трикутників CNM і ABC відносяться як 3:16, $NM:BH=1:2$, де BH — висота трикутника. Знайдіть відношення $AH:HC$.

12.23. У трикутнику ABC $ME \parallel AC$, $MF \parallel AB$ (точки E, M, F лежать відповідно на сторонах AB, BC, CA). Площа паралелограма $AEMF$ дорівнює $\frac{5}{18}$ площі трикутника ABC. Знайдіть відношення $BM : MC$.

12.24. Площа ромба $ABCD$ дорівнює 2. У трикутник ABD (BD — діагональ ромба) вписано коло, яке дотикається до сторін AB в точці K. Через точку K проведено пряму KL, паралельну діагоналі AC (L лежить на стороні BC). Знайти величину кута BAD, якщо відомо, що площа трикутника KBL дорівнює a.

12.25. Дано рівнобедрену трапецію, у якої довжина верхньої основи вдвічі менша, ніж довжина нижнього. Визначити, в якому відношенні ділить нижню основу пряма, яка паралельна діагоналі, проходить нижче за неї і відсікає трикутник площею в 4 рази менший, ніж площа трапеції.

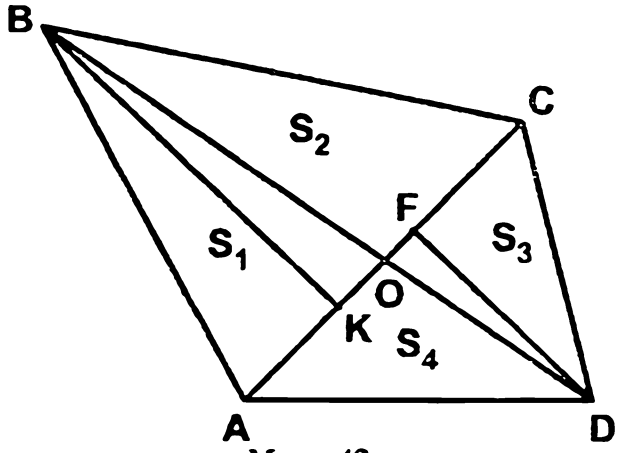
12.26. З точки P, яка лежить на гіпотенузі AC прямокутного трикутника ABC, проведено перпендикуляр PM до AC, який ділить трикутник на дві рівновеликі фігури. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $AP = a$, $CP = b$.

§13. Площі трикутників, на які чотирикутник поділено діагоналями

Ключова задача.

Довести: якщо опуклий чотирикутник $ABCD$ (мал. 42) поділено своїми діагоналями на трикутники з площами S_1, S_2, S_3 і S_4, то

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4.$$



Мал. 42

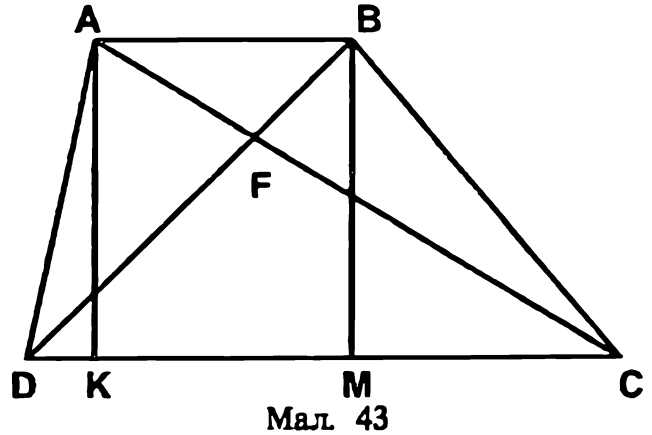
Розв'язання.

Трикутники ABO і CBO мають спільну висоту BK, отже, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC}$. Аналогічно $\frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}$ (DF — спільна висота трикутників ADO і CDO). Прирівнюючи ліві частини одержаних рівностей, матимемо $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$, звідки $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Приклади

Задача 1.

У трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = 1$, $DC = 2$. Позначимо точку перетину діагоналей цієї трапеції через F. Знайти відношення суми площ трикутників ABF і CDF до суми площ трикутників AFD і BFC.



Мал. 43

Розв'язання.

Покажемо, що площі трикутників AFD і BFC (мал. 69) однакові. Справді,

$$S_{AFD} = S_{DAC} - S_{DFC}, \text{ а}$$

$$S_{BFC} = S_{CBD} - S_{DFC}.$$

Але $S_{DAC} = S_{CBD}$ (висоти AK і BM цих трикутників однакові і DC — спільна основа).

Нехай $S_{ABF} = S_1$, а $S_{AFD} = S_{BFC} = S_2$. Оскільки трикутники ABF і CDF подібні, причому $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{2}$, то $S_{CDF} = 4S_1$. Використавши ключову задачу, матимемо $S_1 \cdot 4S_1 = S_2^2$, або $S_2 = 2S_1$. Тоді

$$\frac{S_{ABF} + S_{CDF}}{S_{AFD} + S_{BFC}} = \frac{S_1 + 4S_1}{2S_2} = \frac{5S_1}{2S_2} = \frac{5S_1}{4S_1} = \frac{5}{4}.$$

Відповідь: $\frac{5}{4}$.

Вправи

13.1. У трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) O — точка перетину діагоналей AC і BD. Площі трикутників ABO і CDO дорівнюють відповідно 10 і 40. Знайти площу трапеції.

13.2. Чотирикутник поділено діагоналями на чотири трикутника. Найменші площі трьох з них дорівнюють 10, 20 і 30. Знайти площу даного чотирикутника.

13.3. Площа трапеції дорівнює 3, основи відносяться як 1:2. Знайти площі трикутників, на які трапецію поділено діагоналями.

13.4. У трикутнику ABC на стороні AC взято точку M, а на стороні BC — точку N. Відрізки AN і BM перетинаються в точці O. Знайти площу трикутника CMN, якщо площі трикутників OMA, OAB і OBN відповідно дорівнюють S_1, S_2, S_3.

13.5. O — точка перетину діагоналей опуклого чотирикутника $ABCD$. Відомо, що S_{AOB}, S_{BOC}, S_{COD}, S_{DOA} — натуральні числа. Довести, що добуток цих площ є точним квадратом.

13.6. Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Яку найменшу площу може мати цей чотирикутник, якщо

$$S_{AOB} = 4 \text{ см}^2, \; S_{COD} = 9 \text{ см}^2?$$

13.7. Рівнобедрена трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) описана навколо кола з центром O. O_1 — точка перетину діагоналей трапеції. Площі трикутників AO_1B і AOB дорівнюють 3 і 4. Знайти кути трапеції.

13.8. Через точку A, яка лежить поза колом, проведено дві прямі. Перша пряма перетинає коло в точках B і E, друга — в точках C і D. Прямі BC і DE перетинаються в точці K, яка лежить поза колом. Відомо, що $S_{KBE} = \frac{1}{2} S_{BCDE}$ і $S_{KBE} = 4S_{ABC}$. Знайти $\frac{S_{CBE}}{S_{CDE}}$.

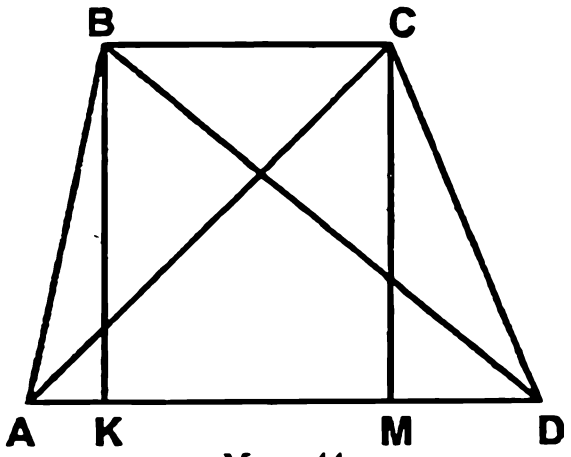
§14. Ознака паралельності сторін чотирикутника

Ключова задача.

Якщо в опуклому чотирикутнику $ABCD$ площі трикутників ABD і ACD рівні, то BC паралельно AD. Довести.

Розв'язання.

Оскільки AD — спільна сторона трикутників ABD і ACD (мал. 44), то їх висоти BK і CM рівні, отже, $BCMK$ — прямокутник і $BC \parallel AD$.

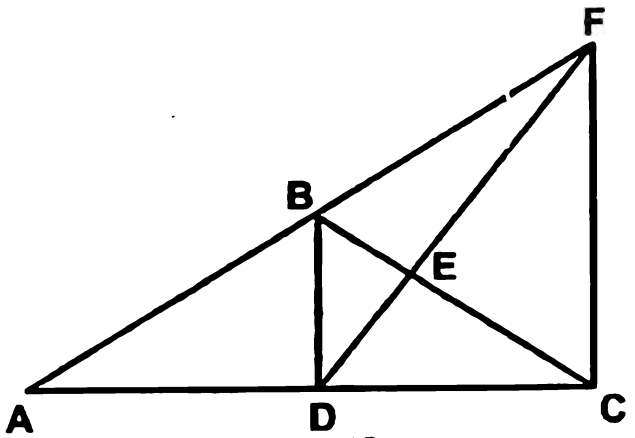


Мал. 44

Приклади

Задача 1.

У рівнобедреному прямокутнику ABC $AB = 1$, $\angle ABC = 120°$. Через середину D сторони AC проходить пряма, яка перетинає BC в точці E і продовження AB в точці F. Площі трикутників BEF і DEC рівні. Знайти довжину відрізка EF.



Мал. 45

Розв'язання.

Покажемо, що $FC \parallel BD$ (мал. 45). Справді, $S_{FDC} = S_{DEC} + S_{FEC}$ і

$$S_{FBC} = S_{BEF} + S_{FEC},$$

отже, $S_{FDC} = S_{FBC}$.

BD — середня лінія трикутника AFC і, таким чином, $FC = 2BD = 1$. $DC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. З прямокутного трикутника FCD $FD = \sqrt{FC^2 + CD^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Оскільки E — точка перетину медіан трикутника AFC, то $EF = \frac{2}{3} FD = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Вправи

14.1. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ E — точка перетину діагоналей. Довести, що AD паралельна BC тоді і тільки тоді, коли $S_{ABE} = S_{CED}$.

14.2. Відрізок, що сполучає середини двох протилежних сторін опуклого чотирикутника, поділив його на два рівновеликих чотирикутника. Довести, що ці сторони паралельні.

14.3. Кожна діагональ чотирикутника ділить його на трикутники однакової площі. Довести, що цей чотирикутник — паралелограм.

14.4. У рівнобічному трикутнику ABC зі стороною a проведено пряму, яка перетинає AB і BC в точках M і P, а продовження AC — в точці N так, що $S_{MBP} = S_{CNP} = S_{AMPC}$. Знайти BM і BP.

14.5. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ E — точка перетину діагоналей. Відомо, що $S_{ABE} = S_{DCE} = 1$, $S_{AECD} \leqslant 4$, $AD = 3$. Знайти BC.

14.6. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ O — точка перетину діагоналей. Довести: якщо $S_{ABCD} = (\sqrt{S_{AOD}} + \sqrt{S_{COB}})^2$, то AD паралельна BC.

14.7. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ E — точка перетину діагоналей. $S_{ABE} = S_{CED}$. Площа $ABCD$ більша за площу трикутника ABE не більше, ніж у чотири рази. Знайти CD, якщо $AB = \sqrt{7}$.

14.8. Доведіть: якщо два трикутники, які утворюються при продовженні сторін опуклого чотирикутника до їх перетину, рівновеликі, то одна з діагоналей чотирикутника ділить другу навпіл.

14.9. Дано опуклий п'ятикутник $ABCDE$.

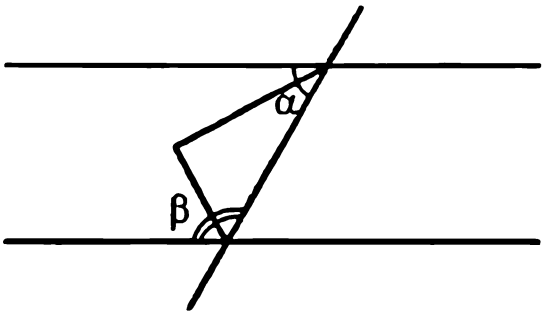
$$S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDE} = S_{DEA} = S_{EAB} = S.$$

Знайти площу $ABCDE$.

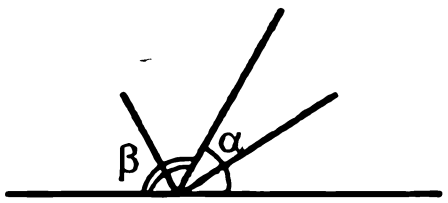
§15. Кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх і суміжних кутів

Ключова задача.

Довести, що кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутов при паралельних прямих (суміжних кутах) дорівнює 90°.



Мал. 46



Мал. 47

Розв'язання.

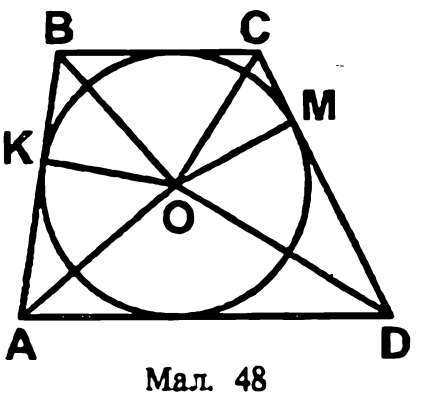
Очевидно, що кут між бісектрисами дорівнює $180° - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ у випадку внутрішніх односторонніх кутів (мал. 46) і $\frac{\alpha+\beta}{2}$ у разі суміжних кутів (мал. 47). Оскільки $\alpha+\beta=180°$, то як в одному, так і в іншому випадку бісектриси перпендикулярні.

Приклади

Задача 1.

Коло, вписане в трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$), дотикається сторін AB і CD в точках K і M відповідно. Довести, що

$AK \cdot KB = CM \cdot MD$ (мал. 48).



Мал. 48

Розв'язання.

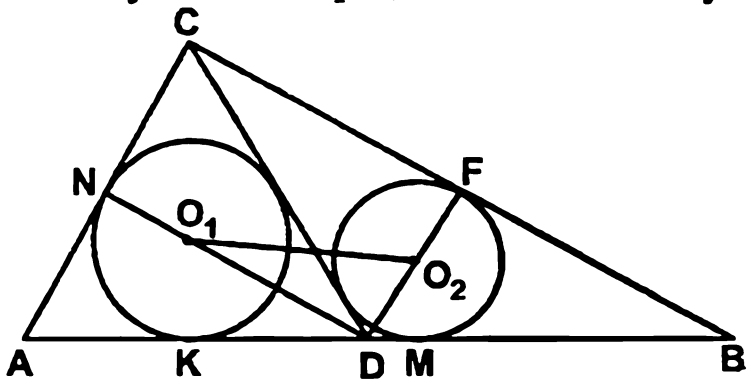
Оскільки CBA і DAB — внутрішні односторонні кути при паралельних BC і AD, а BO і AO — їх бісектриси, то $\angle AOB = 90°$. Так само $\angle COD = 90°$. У прямокутних трикутниках AOB і DOC

$$OK^2 = AK \cdot KB,\ OM^2 = CM \cdot MD.$$

Окрім того, $OK = OM$ як радіуси одного кола. Тоді, прирівнюючи праві частини одержаних рівностей, матимемо довідну властивість.

Задача 2.

У прямокутному трикутнику ABC з катетами 3 і 4 вершину C прямого кута сполучено з серединою D гіпотенузи AB. Знайти відстань між центрами кіл, вписаних у трикутники ACD і BCD.



Мал. 49

Розв'язання.

Оскільки DO_1 і DO_2 (мал. 49) — бісектриси суміжних кутів, то трикутник O_1DO_2 — прямокутний і $O_1O_2^2 = DO_1^2 + DO_2^2$.

$$DO_1 = DN - O_1N,\ DO_2 = DF - O_2F.$$

Оскільки $CD = AD = DB$, то DN і DF — висоти, O_1N і O_2F — радіуси вписаних у рівнобедрені трикутники кіл відповідно CDA і CDB. $DN = 2$, $DF = \frac{3}{2}$, $O_1N = \frac{3}{4}$, $O_2F = \frac{2}{3}$ (перевірте самостійно). Тоді

$$DO_1 = \frac{5}{4},\ DO_2 = \frac{5}{6};\ \text{а}\ O_1O_2 = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{36}} = \frac{5\sqrt{13}}{12}.$$

Відповідь: $\frac{5\sqrt{13}}{12}$.

Вправи.

15.1. У паралелограмі $ABCD$ проведено бісектриси внутрішніх кутів, що перетинаються в точках P, E, M, K відповідно. Довести, що $PEMK$ — прямокутник.

15.2. У трапецію вписано коло радіуса 6. Точка дотику ділить одну з основ на відрізки 9 і 12. Знайти сторони і площу трапеції.

15.3. AM і AN — бісектриси зовнішнього і внутрішнього кутів (відповідно) трикутника ABC. $\angle ABC - \angle BCA = 90°$. Довести, що $AM = AN$.

15.4. З основи висоти CH прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено бісектриси: HE трикутника CHA і HF трикутника CHB. Довести, що точки C, E, F і H лежать на одному колі, причому друга — точка K — перетину цього кола з гіпотенузою AB — основа бісектриси CK трикутника ABC.

15.5. Бісектриса зовнішнього кута при вершині A трикутника ABC перетинає продовження сторони BC в точці E. Довести: якщо AE вдвічі більша висоти трикутника, проведеної з вершини A, то один з кутів B і C трикутника на 60° більший, ніж інший.

15.6. Дано паралелограм $ABCD$ з гострим кутом A. На стороні AD взято точку K так, що BK — бісектриса кута ABC. CK — бісектриса кута BCD. Знайти відношення периметра паралелограма до радіуса кола, описаного навколо трикутника BKC.

15.7. Навколо кола описано трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Відстані від центра O кола до вершин A і B дорівнюють відповідно a і b. Визначити $\sin \angle BAD$ і висоту трапеції.

15.8. У прямокутній трапеції, висота якої $2h$, на стороні, перпендикулярній основі, як на діаметрі, описано коло, що дотикається протилежної сторони трапеції. Знайти добуток довжин основ трапеції.

15.9. До кола проведено дотичні, які дотикаються його в кінцях діаметра AB. Довільні дотичні до кола перетинають ці дотичні в точках K і M відповідно. Довести, що $AK \cdot BM$ — константа.

15.10. Довести, що відрізок, який сполучає центри вписаного і зовнівписаного кіл, ділиться описаним колом навпіл.

15.11. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, CD — висота. $AC = 3$, $CB = 4$. Знайти відстань між центрами кіл, вписаних у трикутники ACD і DCB.

15.12. У трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписано коло з центром у точці O. Довести, що

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2}.$$

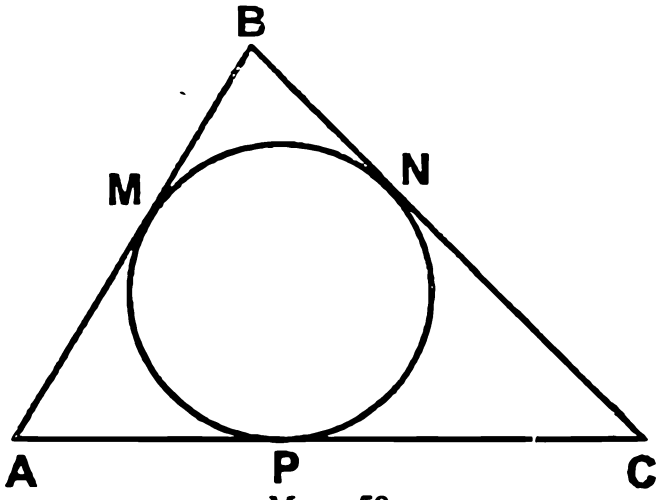
15.13. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) бісектриси внутрішніх кутів A і B перетинаються в точці M, а бісектриси кутів C і D — в точці N. Довести, що довжина відрізка MN дорівнює піврізниці суми основ і суми бічних сторін.

15.14. У ромб вписано коло. Пряма, яка дотикається цього кола в точці P, перетинає сторони AB, BC і продовження сторони AD відповідно в точках N, Q і M так, що $MN : NP : PQ = 7 : 1 : 2$. Визначити $\operatorname{tg} \angle BAO$.

§16. Відстань від вершини трикутника до точки дотику вписаного кола зі стороною

Ключова задача 1.

Нехай M, N, P — точки дотику вписаного кола зі сторонами AB, BC, AC відповідно (мал. 50). Тоді $AM = p - a$, $BN = p - b$, $CP = p - c$, де p — півпериметр трикутника ABC, a — довжина сторони BC, b — довжина AC, а c довжина AB.



Мал. 50

Розв'язання.

Згідно з властивістю дотичних, проведених з однієї точки, маємо

$$AM = AP = x,$$

$$BM = BN = y,$$

$$CN = CP = z.$$

Тоді $2x + 2y + 2z = 2p$,

$x + y + z = p$,

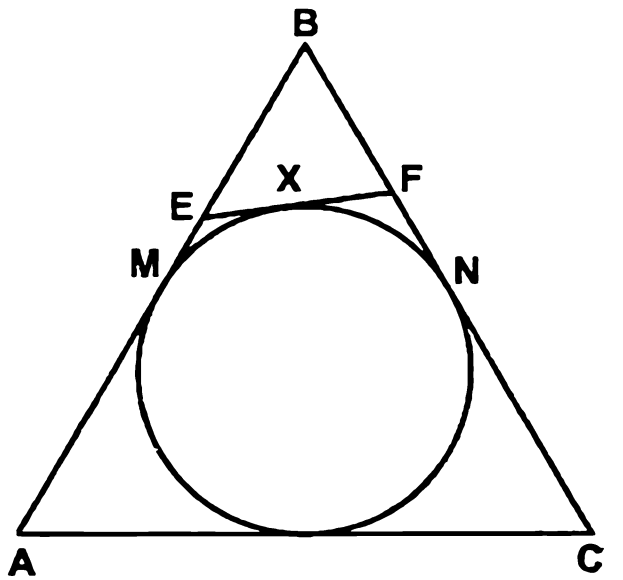
$$x = p - (y + z) = p - a.$$

Так само

$$y = p - b,\ z = p - c.$$

Ключова задача 2.

Нехай M і N — точки дотику вписаного кола зі сторонами AB і BC трикутника ABC. X — довільна точка дуги MN (мал. 51). EF — відрізок дотичної, проведеної до кола в точці X. Тоді периметр трикутника EBF не залежить від вибору точки X і дорівнює $2(p - b)$, де p — півпериметр трикутника ABC. b — довжина сторони AC.



Мал. 51

Розв'язання.

Периметр трикутника EBF дорівнює $EB + BF + FE =$

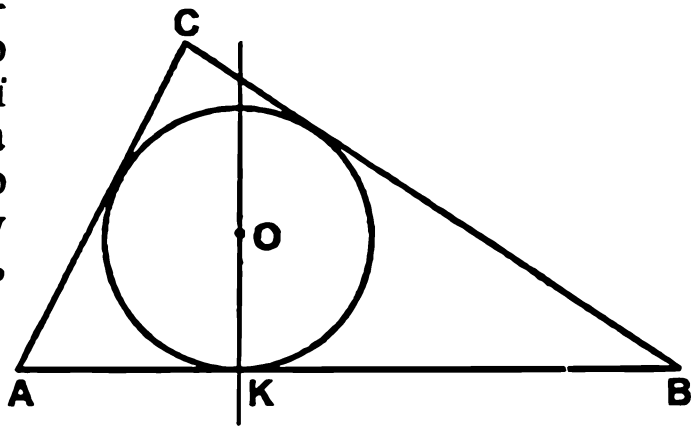
$$= EB + BF + EX + XF = BE + EM + BF + FN =$$

$$= MB + BN = 2BM = 2\,(p - b).$$

Приклади

Задача 1.

Дві вершини трикутника закріплено в точках A і B, а третя вершина пересувається в площині так, що різниця відстаней від неї до точок B і A — величина постійна. Довести, що центри кіл, вписаних у трикутники ABC, лежать на одній прямій.



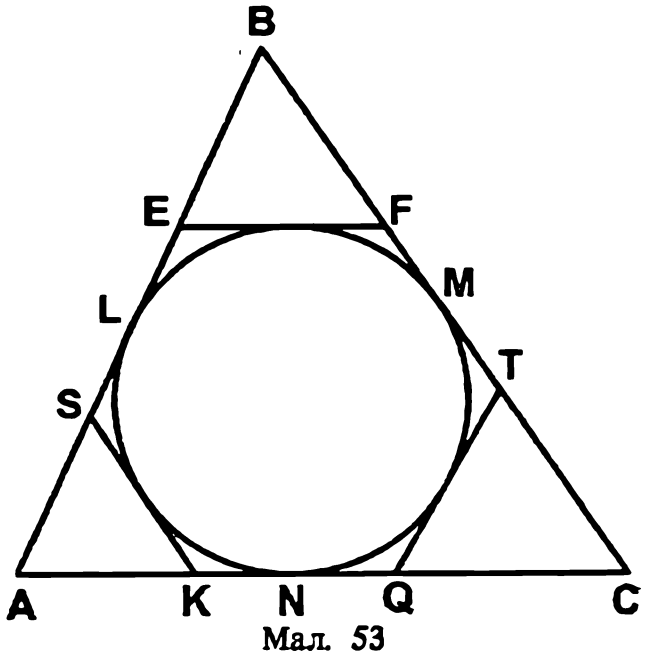
Мал. 52

Розв'язання.

Нехай K — точка дотику вписаного кола зі стороною AB (мал. 52). Якщо p — півпериметр трикутника ABC, то

$$AK = p - BC = \frac{AB + BC + AC}{2} - BC =$$

$$= \frac{AB - (BC - AC)}{2}$$ — величина постійна. Отже, усі кола, вписані в трикутники ABC, дотикаються сторони AB в одній і тій самій точці. Тому їх центри лежать на прямій, що проходить через точку K перпендикулярно AB.



Мал. 53

Задача 2.

У трикутнику проведено три прямі, які паралельні його сторонам і дотикаються вписаного кола. Вони відсікають від даного трикутника три трикутники (мал. 53). Радіуси кіл, описаних нав-

коло них, дорівнюють R_1, R_2, R_3. Знайти радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

Розв'язання.

Периметри трикутників ASK, EBF, TCQ відповідно дорівнюють $2(p-a)$, $2(p-b)$, $2(p-c)$. Кожний з цих трикутників подібний трикутнику ABC. Периметри подібних трикутників відносяться як їх відповідні лінійні елементи. Маємо:

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2(p-a)}{2p}, \frac{R_2}{R} = \frac{2(p-b)}{2p}, \frac{R_3}{R} = \frac{2(p-c)}{2p},$$

де R — радіус описаного кола трикутника ABC. Звідси $\frac{R_1+R_2+R_3}{R} = \frac{3p-(a+b+c)}{p} = \frac{3p-2p}{p} = 1.$

Тоді $R = R_1 + R_2 + R_3$.

Вправи

16.1. Довести, що для трикутника ABC ($AB = c$, $BC = a$, $AC = b$) має місце рівність $r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

16.2. У трикутнику ABC з периметром $2p$ довжина сторони AC дорівнює a, $\angle ABC = \alpha$. Вписане у трикутник коло з центром O дотикається BC в точці K. Знайдіть площу трикутника BOK.

16.3. Довести, що в прямокутному трикутнику радіус вписаного кола дорівнює $\frac{a+b-c}{2}$, де a і b — довжини катетів, c — довжина гіпотенузи.

16.4. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 і 15. Чому дорівнює відстань від вершини прямого кута до центра вписаного кола?

16.5. Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, дорівнює піврізниці катетів. Знайдіть кути трикутника.

16.6. У трикутник ABC зі сторонами $BC = a$, $AC = 2a$ і кутом $C = 120°$ вписано коло. Через точки дотику цього кола зі сторонами AC і BC і через вершину B проведено друге коло. Знайдіть його радіус.

16.7. Довести, що площа прямокутного трикутника дорівнює добутку відрізків, на які точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу.

16.8. Довести: якщо площа трикутника дорівнює добутку відрізків, на які розбивається його сторона точкою дотику вписаного кола, то трикутник — прямокутний.

16.9. Дано паралелограм $ABCD$. У трикутники ABC, ACD, ABD і BCD вписано кола. Доведіть, що точки дотику кіл і діагоналей паралелограма — вершини прямокутника.

16.10. Довести: якщо в опуклий чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, то кола, вписані в два трикутника ABC і ADC, дотикаються одне одного.

16.11. У трикутнику ABC зі сторонами $AB = \sqrt{3}$, $BC = 4$, $AC = \sqrt{7}$ проведено медіану BD. Кола, вписані в трикутники ABD і BDC, дотикаються BD в точках M і N відповідно. Знайдіть MN.

16.12. На основі AC рівнобедреного трикутника ABC розміщено точку D; $AD = a$, $DC = b$. Кола, вписані в трикутники ABD і DBC, дотикаються BD в точках M і N відповідно. Знайдіть MN.

16.13. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить гіпотенузу у відношенні 2:3. Знайти сторони трикутника, якщо центр вписаного кола віддалено від вершини прямого кута на відстань $\sqrt{8}$.

16.14. У трикутник зі сторонами 6, 10 і 12 вписано коло. До кола проведено дотичну так, що вона перетинає дві більші сторони. Знайдіть периметр відтятого трикутника.

16.15. У трикутник з периметром, який дорівнює 20, вписано коло. Відрізок дотичної, проведеної до кола паралельно основі, розміщений між сторонами трикутника, дорівнює 2,4. Знайдіть основу трикутника.

16.16. У рівнобедрений трикутник з основою 12 вписано коло, а до нього проведено три дотичні так, що вони відтинають від даного трикутника три малих трикутники. Сума периметрів малих трикутників дорівнює 48. Знайдіть бічну сторону даного трикутника.

16.17. У рівнобедрений трикутник вписано коло. Точки дотику ділять кожну бічну сторону на відрізки довжиною m і n, рахуючи від вершин. До кола проведено три дотичні, паралельні кожній із сторін трикутника. Знайдіть довжину відрізків дотичних, розміщених між сторонами трикутника.

16.18. У трикутнику ABC K і L — точки дотику сторони AB з вписаним і зовнівписаним колами відповідно. Доведіть, що $AL = BK$.

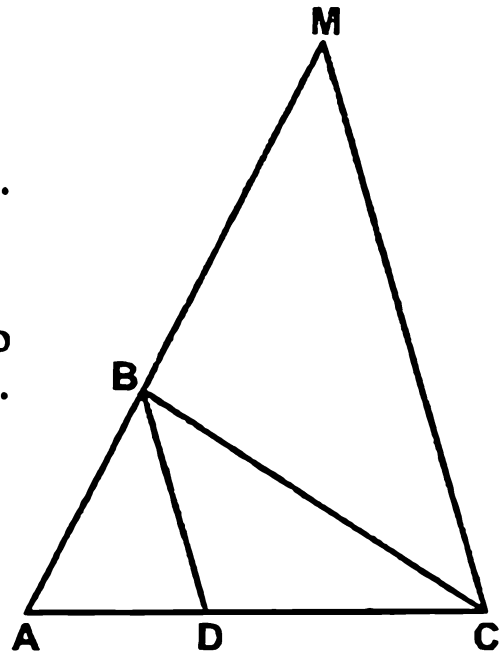
16.19. У трикутник постійного периметра $2p$ вписано коло. До цього кола проведено дотичну, паралельну стороні трикутника. Знайдіть найбільш можливу довжину відрізка дотичної, кінці якої належать сторонам трикутника.

16.20. Коло радіуса 1 вписано в трикутник ABC, в якому $\cos \angle ABC = 0{,}8$. Це коло дотикається середньої лінії трикутника ABC, паралельної стороні AC. Знайдіть довжину сторони AC.

§17. Властивості бісектриси кута трикутника

Ключова задача.

Якщо BD — бісектриса кута B трикутника ABC (мал. 54), то $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.



Мал. 54

Розв'язання.

Проведемо $CM \parallel BD$ (мал. 54). Тоді $\angle ABD = \angle BMC$ і

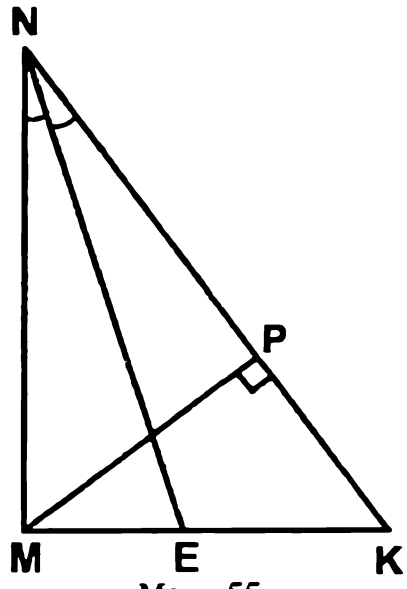
$$\angle BCM = \angle DBC.$$

Оскільки $\angle ABD = \angle DBC$, то $\angle BMC = \angle MCB$. Звідси $BM = BC$. Маємо: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BM} = \frac{AB}{BC}$.

Приклади

Задача.

Відстань від вершини прямого кута до гіпотенузи дорівнює a, а до точки перетину бісектриси меншого кута з меншим катетом дорівнює b. Знайдіть довжину меншого катета.



Мал. 55

Розв'язання.

$MP \perp NK$ (мал. 55), $MP = a$. NE — бісектриса кута N, $ME = b$. Нехай $\angle MNK = \alpha$, тоді $\angle PMK = \alpha$. Маємо: $\frac{ME}{EK} = \frac{MN}{NK} = \cos\alpha$. З другого боку, $\cos\alpha = \frac{MP}{MK}$. Звідси $\frac{b}{MK - b} = \frac{a}{MK}$, $MK = \frac{ab}{a-b}$. Відповідь: $\frac{ab}{a-b}$.

Вправи

17.1. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, CD — бісектриса, $AD = m$, $BD = n$. Знайдіть катети трикутника.

17.2. У прямокутний трикутник вписано півколо так, що діаметр лежить на гіпотенузі, а центр ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 15 і 20. Знайдіть радіус півкола.

17.3. Точка на гіпотенузі, рівновіддалена від обох катетів, ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 30 і 40. Знайдіть катети трикутника.

17.4. У прямокутний трикутник з кутом 60° вписано ромб зі стороною, яка дорівнює 6, так, що кут в 60° у них спільний і всі вершини ромба лежать на сторонах трикутника. Знайдіть сторони трикутника.

17.5. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона дорівнюють відповідно 5 і 20. Знайдіть бісектрису кута при основі трикутника.

17.6. Знайдіть бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника з катетами 24 і 18.

17.7. У трикутнику ABC бісектриси BD і AE кутів B і A перетинаються в точці O. Визначте AC, якщо $AB = 12$, $AO : OE = 3 : 2$ і $AD : DC = 6 : 7$.

17.8. У трикутнику ABC AD — бісектриса кута A, $AB + BD = DC + AC$. Доведіть, що даний трикутник рівнобедрений.

17.9. Коло радіуса R дотикається сторін AB і BC трикутника ABC в точках K і M відповідно. Відомо, що центр кола лежить на стороні AC, M — середина сторони BC, довжина відрізка BK вдвічі більша довжини відрізка AK. Знайдіть площу трикутника.

17.10. Рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) вписано в коло. Діаметр AD перетинає сторону BC в точці E, і $DE : AE = k$. Знайдіть відношення $CE : BC$.

17.11. Кути A і B трикутника ABC відповідно дорівнюють 30° і 50°. Доведіть, що сторони трикутника пов'язані співвідношенням $a = \dfrac{c^2 - b^2}{b}$, де $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

17.12. Відрізок AD є бісектрисою прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Коло радіуса $\sqrt{15}$ проходить через точки A, C і D і перетинає гіпотенузу AB в точці E так, що $AE : AB = 3 : 5$. Знайдіть площу трикутника ABC.

17.13. Сторона AC трикутника ABC ділиться основою D бісектриси кута B на відрізки 12 і 3. Знайдіть радіус кола з центром на прямій AC, яка проходить через точки B і D.

17.14. У трикутнику ABC бісектриса кута BAC дорівнює a. Коло, побудоване на цій бісектрисі як на діаметрі, ділить відповідно сторони AB і AC у відношенні 2:1 і 1:1, рахуючи від вершини A. Знайдіть площу трикутника ABC.

17.15. У коло вписано квадрат $ABCD$. Хорда AE проходить через середину M його сторони CD. В якому співвідношенні хорда BE ділить сторону CD?

17.16. У крузі проведено дві хорди AB і CD, які перетинаються в точці M. K — точка перетину бісектриси кута BMD з хордою BD. Знайдіть відрізки BK і KD, якщо $BD = 3$ і площі трикутників CMB і AMD відносяться як 1:4.

17.17. У трикутнику ABC проведено бісектриси AD і CF (точка D лежить на стороні BC, а точка F — на стороні AB). Знайдіть відношення площ трикутників ABC і AFD, якщо відомо, що $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.

17.18. У трикутнику ABC бісектриса BE і медіана AD перпендикулярні і мають однакову довжину, яка дорівнює 4. Знайдіть сторони трикутника ABC.

17.19. Дано рівнобедрену трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Точки K і F — середини сторін BC і AD відповідно. На стороні AB як на діаметрі побудовано коло, яке дотикається до прямої KF в точці P і перетинає сторону AD в точці N. E — точка перетину прямих AP і BN. Доведіть, що $BE : EN = DN : NA$.

17.20. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) бісектриси BD і AF перетинаються в точці O. $S_{DOA} : S_{BOF} = 3 : 8$. Знайдіть $AC : AB$.

17.21. N — середина сторони AC рівнобічного трикутника ABC, Z — точка на висоті BN. Пряма AZ перетинає коло, описане навколо трикутника ABC в точці P. Знайдіть відношення $BP : PC$, якщо $BN = 7BZ$.

17.22. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено бісектрису AD. Площі трикутників ABD і ADC дорівнюють відповідно S_1 і S_2. Знайдіть AC.

§18. Друга ознака подібності трикутників

Ключова задача.

Довести, що якщо в трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ виконується співвідношення $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ і $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то такі трикутники подібні.

Доведення сформульованого твердження можна знайти в будь-якому шкільному підручнику.

Приклади

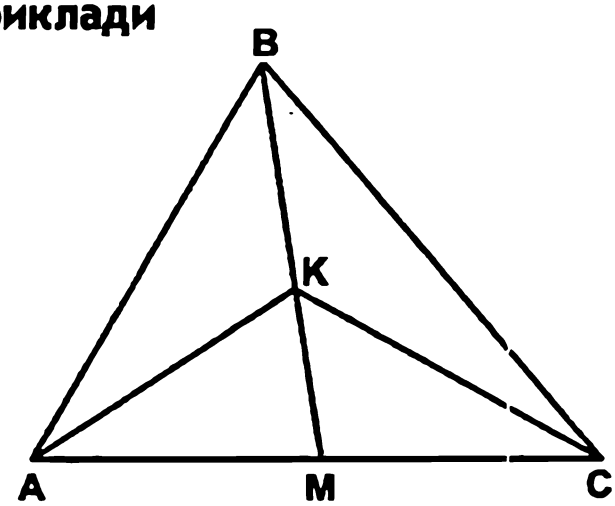
Задача 1.

У трикутнику ABC на медіані BM обрано точку K так, що

$$\angle MKC = \angle BCM.$$

Довести, що

$$\angle AKM = \angle BAM.$$



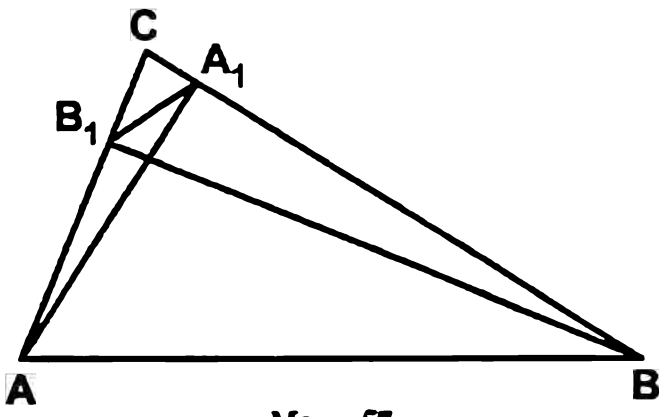
Мал. 56

Розв'язання.

Оскільки трикутники BMC і CMK (мал. 56) подібні за першою ознакою подібності, то $\frac{BM}{MC} = \frac{MC}{KM}$. Враховуючи, що $MC = AM$, одержимо $\frac{BM}{AM} = \frac{AM}{KM}$, отже, трикутники ABM і KAM подібні ($\angle KMA = \angle AMB$). Звідси $\angle BAM = \angle AKM$.

Задача 2.

У гострокутному трикутнику ABC AA_1 і BB_1 — висоти. Довести, що трикутник A_1B_1C подібний до трикутника ABC.



Мал. 57

Розв'язання.

У прямокутному трикутнику AA_1C (мал. 57) $\frac{CA_1}{CA} = \cos \angle ACB$.

Аналогічно $\frac{CB_1}{CB} = \cos\angle ACB$, отже, $\frac{CA_1}{CA} = \frac{CB_1}{CB} = \cos \angle ACB$, і трикутники A_1B_1C і ABC подібні з коефіцієнтом подібності $k = \cos \angle ACB$.

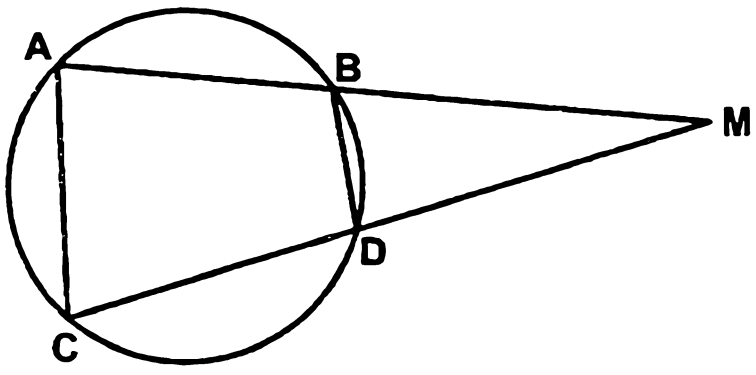
Вправи

18.1. У трикутнику ABC $\angle BAC = 45°$, $\angle ABC = 75°$. Радіус кола, описаного навколо ΔABC, дорівнює R. AA_1 і BB_1 — висоти, H — точка їх перетину. Знайти радіуси кіл, описаних навколо трикутників A_1B_1C і A_1B_1H.

18.2. У трикутнику ABC $AB = 8$, $BC = 12$, $AC = 16$. Точка D ділить AC на відрізки $AD = 7$ і $DC = 9$. Знайти BD.

18.3. З точки A проведено два промені AM і AN. На промені AM взято точки H і B, а на промені AN — точки C і D так, що $AH \cdot AB = AC \cdot AD$. Довести, що точки H, B, C і D лежать на одному колі.

18.4. З точки M, яка лежить поза колом, проведено два промені, які перетинають коло в точках A, B, C і D (мал. 58). Довести, що трикутники AMC і DMB подібні.



Мал. 58

18.5. Відрізок AB є діаметром круга, а точка C лежить поза цим кругом. Відрізки AC і BC перетинаються з колом у точках D і M відповідно. Знайти кут CBD, якщо площі трикутників DCM і ACB відносяться як 1:4.

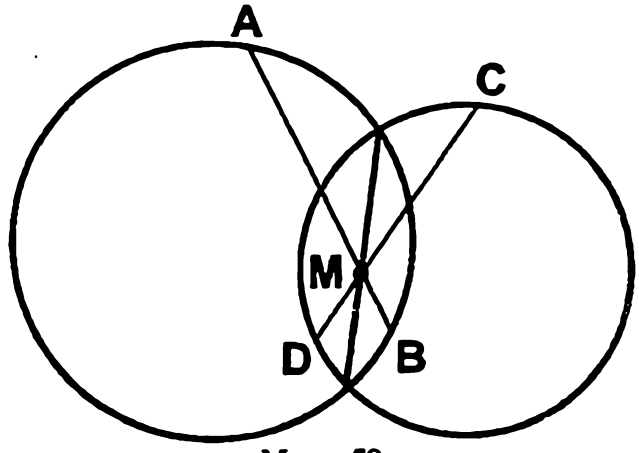
18.6. Коло, побудоване на стороні AC трикутника ABC як на діаметрі, проходить через середину сторони BC і пе-

ретинає сторону AB в точці D так, що $AD = \frac{1}{3}AB$. Знайти площу трикутника ABC, якщо $AC = 1$.

18.7. Рівнобедрений трикутник ABC з основою $AB = 12$ має довжину бічної сторони 10. Коло, побудоване на бічній стороні як на діаметрі, перетинає інші сторони в точках H і P. Знайти площу чотирикутника $AHPC$.

18.8. У трикутнику ABC на середній лінії DE, паралельній AB, як на діаметрі побудовано коло, що перетинає сторони AC і BC в точках M і N. Знайти MN, якщо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

18.9. На стороні AB трикутника ABC взято точку M таку, що $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. Відомо, що $\angle BAC = 45°$ і $\angle ABC = 75°$. Знайти $\angle ACM$.



Мал. 59

18.10. На спільній хорді двох кіл, що перетинаються, взято точку M і через неї проведено хорди AB і CD (мал. 59). Довести, що

$$\angle MDB = \angle MAC.$$

18.11. Через середину E відрізка AM (M належить стороні CB) трикутника ABC і його вершину C проведено пряму, яка перетинає AB в точці D, причому $AE^2 = EC \cdot ED$. Довести, що точки A, D, M і C лежать на одному колі.

18.12. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BD і CE. З вершин B і C до прямої ED проведено перпендикуляри BF і CK. Довести, що $EF = DK$.

18.13. У трикутнику ABC проведено висоти AH, BK і CL. Довести рівність $AK \cdot BL \cdot CH = AL \cdot BH \cdot CK = HK \cdot KL \cdot LH$.

18.14. Точка M, яка лежить поза кругом з діаметром AB, сполучена з точками A і B. Відрізки MA і MB перетинають коло відповідно в точках C і D. Площа круга, вписаного в

грикутник AMB, в 4 рази більша за площу круга, вписаного в трикутник CMD. Знайти $\angle AMB$.

18.15. У трикутнику ABC AH — висота (H належить відрізку BC). Виконується співвідношення $AH^2 = BH \cdot CH$. Довести, що $\angle BAC = 90°$.

18.16. Довести: якщо між сторонами a, b і c трикутника є залежність $a^2 = b^2 + bc$, то кути A і B, протилежні сторонам a і b, задовольняють рівність $\angle A = 2\angle B$.

Глава III

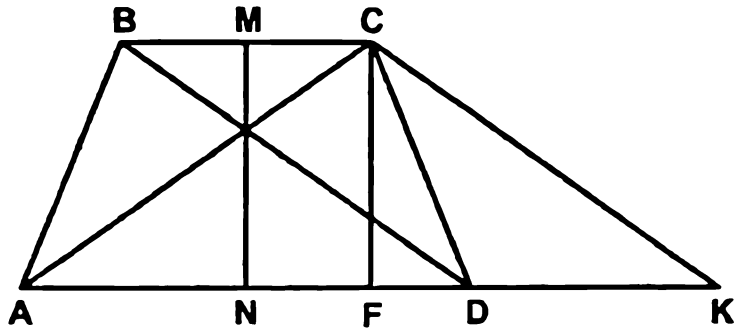
Вибрані методи і прийоми

§1. «Подовження» медіани

Додаткова побудова — один з найбільш ефективних прийомів розв'язування геометричних задач. Проте такі побудови найчастіше пов'язані з серйозними труднощами. Добре, коли умова задачі підказує, як доповнити креслення.

У багатьох задачах, пов'язаних з медіаною, її «подвоєння» або «подовження» на третину дає результат.

Наведемо характерний приклад.



Мал. 60

Задача 1.

У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) M і N — середини основ BC і AD. $AC = \sqrt{15}$, $BD = 1$, $MN = 2$. Знайти площу трапеції.

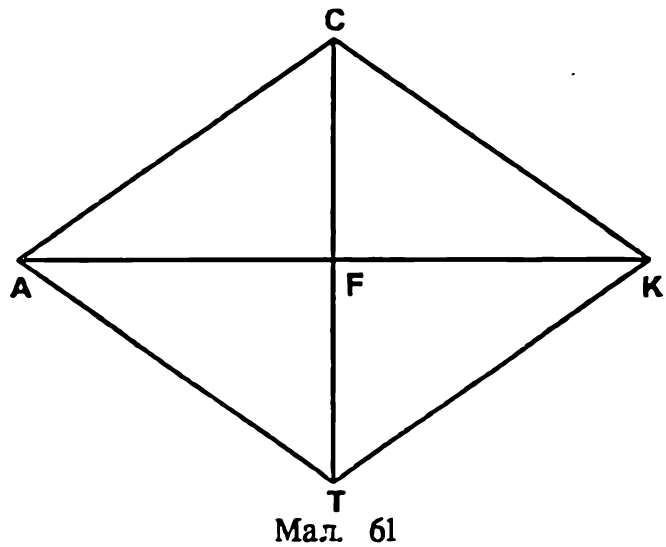
Розв'язання.

На прямій AD (мал. 60) відкладемо відрізок $DK = BC$.

Оскільки $DBCK$ — паралелограм, то

$$BD = CK = 1.$$

Проведемо $CF \parallel MN$. Нескладно показати, що F — середина AK. Окрім того, $S_{BAC} = S_{DCK}$ (рівні основи і висоти). Тоді очевидно, що $S_{ABCD} = S_{ACK}$.



Мал. 61

Отже, задача звелася до пошуку площі трикутника ACK за двома сторонами $AC = \sqrt{15}$, $CK = 1$ і медіаною до

третьої сторони $CF = 2$. «Подвоїмо» медіану CF (мал. 61). Оскільки $AF = FK$ і $CF = FT$, то $ACKT$ — паралелограм. За теоремою про сторони і діагоналі паралелограма $AK^2 + CT^2 = 2(AC^2 + CK^2)$. Звідси $AK = 4$.

Далі просто ($\angle ACK = 90°$).

Відповідь: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Вправи

1.1. Побудувати трикутник за двома сторонами і медіаною до третьої сторони.

1.2. У рівнобедреному трикутнику з бічною стороною, яка дорівнює 4, проведено медіану бічної сторони, що дорівнює 3. Знайти основу трикутника.

1.3. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$, а медіана бічної сторони — 5. Знайти довжини бічних сторін.

1.4. Сторони AB і AC трикутника ABC дорівнюють 8 і 6. В яких межах змінюється медіана AM?

1.5. Довести: якщо дві сторони і медіана, проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і медіані до третьої сторони другого трикутника, то такі трикутники рівні.

1.6. У трикутнику ABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Знайти довжину медіани AM.

1.7. Знайти відношення суми квадратів усіх медіан трикутника до суми квадратів усіх його сторін.

1.8. Знайти кути, утворені медіаною BB_1 зі сторонами ΔABC AB і BC, якщо $AB = 6$, $BC = 8$, $BB_1 = 5$.

1.9. Довести, що медіана трикутника менша за півсуму сторін, між якими вона проходить.

1.10. Доведіть нерівність: $\frac{3}{2}p < m_1 + m_2 + m_3 < 2p$, де m_1, m_2, m_3 — медіани, а p — напівпериметр трикутника.

1.11. Усередині кута взято точку M. Провести через M пряму так, щоб відрізок, який проведено між сторонами кута, ділився точкою M навпіл.

1.12. У трикутнику ABC $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \varphi$. Медіана $AM = m$. Знайти площу трикутника.

1.13. У трикутнику ABC медіана BM перпендикулярна до сторони BC. $AB : BC = 2 : 1$. Знайти $\angle ABC$.

1.14. Дано два концентричні кола. Довести, що сума квадратів відстаней від точки одного кола до кінців діаметра іншого кола не залежить ні від обраної точки, ні від обраного діаметра.

1.15. Знайти відношення площі трикутника до площі трикутника, сторони якого дорівнюють медіанам даного.

1.16. Побудувати трикутник за трьома медіанами.

1.17. Дано прямокутник $ABCD$. Довести, що для будь-якої точки M площини $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

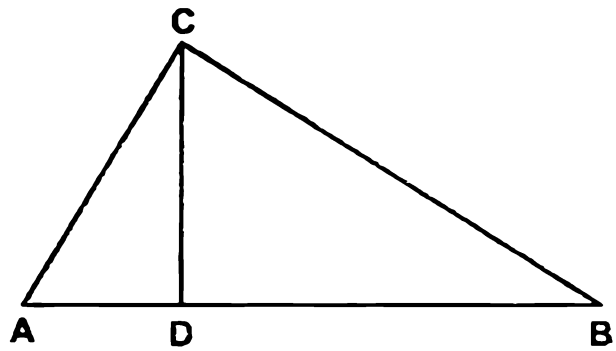
§2. Метод допоміжної площі

Ключом до розв'язання багатьох задач є робота з поняттям, на яке в умові немає навіть натяку. Нерідко такою допоміжною величиною є площа.

Приклади

Задача 1.

У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) CD — висота (мал. 62). Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і DCB, відповідно дорівнюють r_1 і r_2. Знайдіть радіус вписаного кола в трикутник ABC.



Мал. 62

Розв'язання.

Нехай площі трикутників ACD, DCB, ABC відповідно дорівнюють S_1, S_2, S. Зрозуміло, що

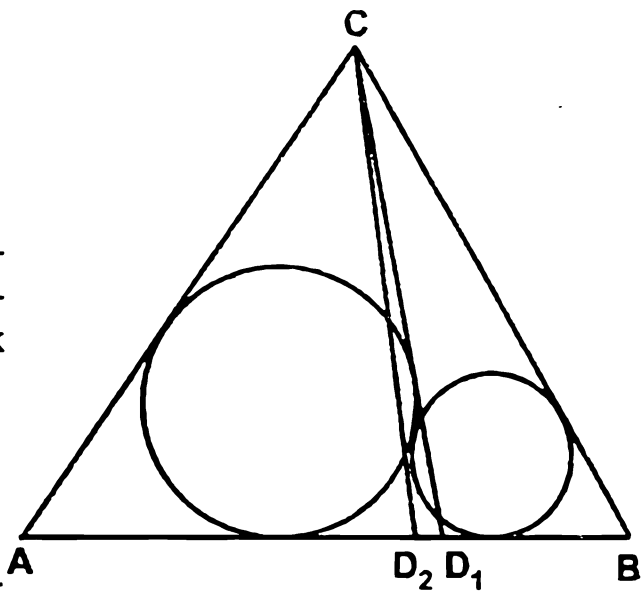
$$\Delta ACD \sim \Delta ABC \text{ і}$$

$$\Delta CBD \sim \Delta ABC.$$

Площі подібних трикутників відносяться як квадрати відповідних лінійних елементів. Маємо:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{r_1^2}{r^2}, \quad \frac{S_2}{S} = \frac{r_2^2}{r^2},$$

де r — радіус кола, вписаного в трикутник ABC.



Мал. 63

Звідси $\dfrac{S_1 + S_2}{S} = \dfrac{r_1^2 + r_2^2}{r^2}$,

$r^2 = r_1^2 + r_2^2$, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Задача 2.

У трикутник ABC вписано два кола, які дотикаються одне одного так, що одне дотикається сторін AB і AC, а

інше — AB і BC. Довести, що сума радіусів цих кіл більша радіуса кола, вписаного в даний трикутник.

Розв'язання.

Проведемо дотичні CD_1 і CD_2 до даних кіл (мал. 63). Зрозуміло, що $S_{ABC} \leqslant S_{ACD_2} + S_{BCD_1}$.

Тоді $pr \leqslant p_1r_1 + p_2r_2$, де p, p_1, p_2, r, r_1, r_2 — півпериметри і радіуси вписаних кіл відповідно трикутників ABC, ACD_1, D_2CB. Маємо

$$r \leqslant \frac{p_1}{p} \cdot r_1 + \frac{p_2}{p} \cdot r_2.$$

Оскільки $p_1 < p$ і $p_2 < p$, то $\frac{p_1}{p} < 1$ і $\frac{p_2}{p} < 1$. Звідси $r < r_1 + r_2$.

Вправи

2.1. За даними катетами a і b визначте висоту, проведену до гіпотенузи.

2.2. Сторони трикутника дорівнюють 13, 14 і 15. Знайдіть найменшу висоту.

2.3. Сторони трикутника дорівнюють 5 і 8, кут між ними 60°. Знайдіть висоту, проведену на третю сторону.

2.4. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки, яка лежить всередині рівнобічного трикутника, до його сторін не залежить від вибору цієї точки.

2.5. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки, взятої всередині правильного многокутника, до всіх прямих, які є його сторонами, величина постійна.

2.6. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки основи рівнобедреного трикутника до бічних сторін не залежить від положення точки на основі.

2.7. Розв'яжіть ключову задачу §17 глави II методом площ.

2.8. У трикутнику довжини двох сторін дорівнюють 6 і 3. Знайдіть довжину третьої сторони, якщо півсума висот, проведених до даних сторін, дорівнює третій висоті.

2.9. Побудувати трикутник за двома сторонами, якщо сума відповідних їм висот дорівнює третій стороні.

2.10. Доведіть, що будь-якому трикутнику відповідає рівність $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$, де r — радіус вписаного кола.

2.11. У трикутник зі сторонами a, b, c вписано півкруг з діаметром, що лежить на стороні c. Знайдіть радіус цього півкруга.

2.12. Радіуси двох кіл, які перетинаються, дорівнюють 17 і 39, а відстань між центрами 44. Визначте довжину спільної хорди.

2.13. Висоти паралелограма h_1 і h_2, а периметр — $2p$. Знайдіть сторони.

2.14. Визначте гострий кут ромба, в якому сторона є середнім пропорційним між діагоналями.

2.15. У трикутнику ABC $AC = a$, $BD \perp AC$, $BD = h$, r — радіус вписаного кола. Знайдіть відстань від центра вписаного кола до вершини B.

2.16. Пряма проходить через вершину B рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) і перетинає його основу AC в точці D. Відомо, що $\angle ABD = \frac{1}{3}\angle ABC$ і $AD : DC = 3 : 4$. Гострий чи тупий кут ABC?

2.17. Довести, що бісектриса AL трикутника ABC дорівнює $\frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$, де $\alpha = \angle BAC$, $b = AC$, $c = AB$.

2.18. У трикутнику ABC проведено медіани AK і CM. Виявилось, що $\angle BAK = \angle BCM = 30°$. Довести, що трикутник ABC рівнобічний.

2.19. Усередині трикутника ABC взято точку O. Прямі AO, BO, CO перетинають сторони трикутника відповідно в точках A_1, B_1, C_1. Довести, що

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \text{ (теорема Чеви).}$$

2.20. Довести, що діагоналі вписаного чотирикутника відносяться, як суми добутків його сторін, що сходяться до кінців цих діагоналей:

$$AC : BD = (AB \cdot AD + BC \cdot CD) : (AB \cdot BC + CD \cdot AD).$$

2.21. Сторони трикутника утворюють арифметичну прогресію. Довести, що бісектриса середнього за величиною кута є геометричним місцем точок, сума відстаней від яких до сторін трикутника є величиною постійною.

2.22. Усередині трикутника ABC взято точку O. Прямі AO, BO і CO перетинають сторони трикутника ABC відповідно в точках A_1, B_1 і C_1. Довести, що

$$\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1.$$

§3. Метод допоміжного кола

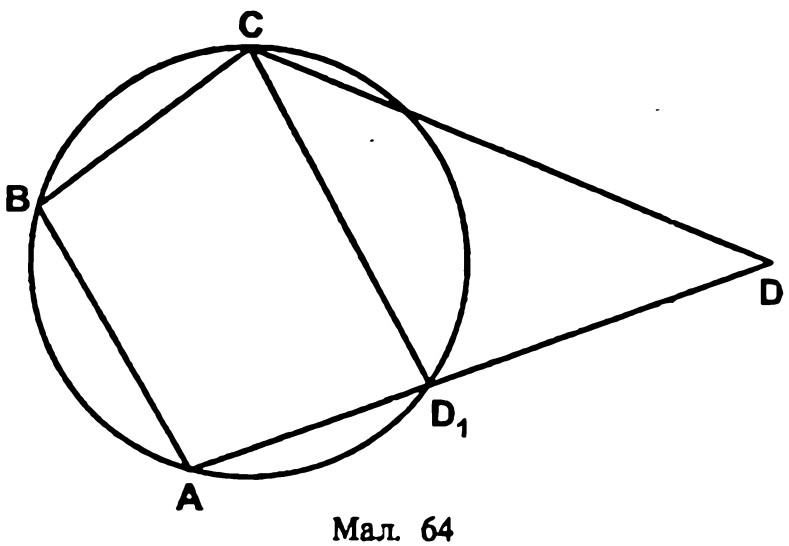
Певно, допоміжне коло — одна з найбільш естетичних допоміжних побудов. Найімовірніше, це пов'язано з тим, що «побачити» коло там, де його немає, вже само собою нетривіально. Проте ми сподіваємося, що після вивчення цього параграфа у читача частіше виникатимуть «кола перед очима».

Ключова задача 1.

Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.

Розв'язання.

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Побудуємо коло, яке проходить через точки A, B і C (це завжди можливо). Припустимо, що це коло не проходить через точку D, а перетинає сторону AD в точці D_1 — мал. 64 (випадок, коли коло перетинає продовження сторони AD, розглядається аналогічно). Оскільки чотирикутник $ABCD_1$ вписаний у коло, то $\angle ABC + \angle AD_1C = 180°$. Звідси $\angle D_1 = \angle D$, чого бути не може, оскільки $\angle AD_1C$ — зовнішній для трикутника CDD_1. Отже, побудоване коло проходить через точку D.



Мал. 64

Приклади

Задача 1.

Довести, що висоти AH_1, BH_2, CH_3 гострокутного трикутника ABC ділять навпіл кути трикутника $H_1H_2H_3$.

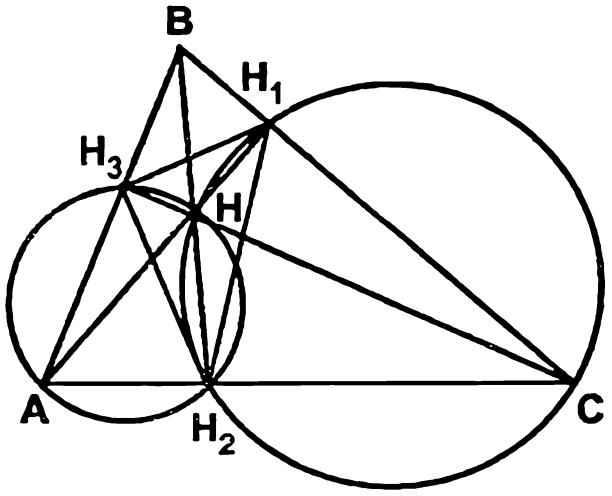
Розв'язання.

Оскільки $\angle AH_3H + \angle HH_2A = 180°$, то навколо чотирикутника AH_3HH_2 можна описати коло (мал. 65). Тоді $\angle H_3AH = \angle H_3H_2H$ як вписані, що спираються на одну дугу. Аналогічно доводять, що

$$\angle HH_2H_1 = \angle H_1CH.$$

Але $\angle BAH = \angle BCH$, оскільки вони доповнюють кут ABC до 90°. Звідси

$$\angle H_3H_2H = \angle H_1H_2H.$$



Мал. 65

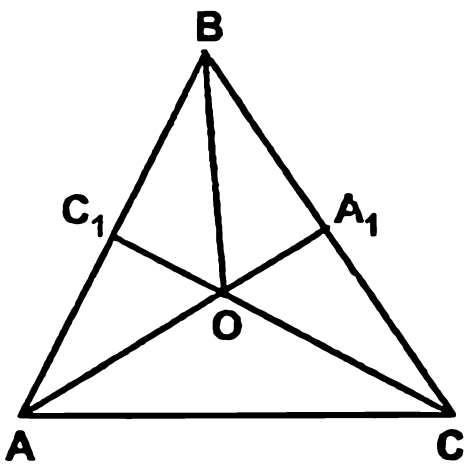
Так само доводять, що

$$\angle H_3H_1H = \angle H_2H_1H \text{ і}$$

$$\angle H_1H_3H = \angle H_2H_3H.$$

Задача 2.

У трикутнику ABC $\angle B = 60°$, AA_1 і CC_1 — бісектриси, що перетинаються в точці O (мал. 66). Доведіть, що $OA_1 = OC_1$.



Мал. 66

Розв'язання.

$$\angle C_1OA_1 = \angle AOC = 180° - (\angle OAC + \angle OCA) =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(180° - 60°) = 120°.$$

Отже, $\angle C_1BA_1 + \angle C_1OA_1 = 180°$, тобто навколо чотирикутника OC_1BA_1 можна описати коло. Оскільки O — точка перетину бісектрис трикутника, то $\angle C_1BO = \angle OBA_1$. Таким чином, $\smile C_1O = \smile OA_1$, а рівні дуги стягують рівні хорди, тобто $OC_1 = OA_1$.

Вправи

3.1. З точки P, розміщеної всередині гострого кута BAC, проведено перпендикуляри PC_1 і PB_1 відповідно на прямі AC і AB. Доведіть, що $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

3.2. Дано прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). На катеті BC вибрано довільну точку M. З точки M проведено перпендикуляр MN на гіпотенузу AB. Доведіть, що $\angle ANC = \angle AMC$.

3.3. Усередині трикутника ABC довільно взято точку O. З неї проведено перпендикуляри OM, OF і OP відповідно на сторони AB, BC і AC. Доведіть, що

$$\angle AOC = \angle AMP + \angle PFC.$$

3.4. У прямокутник $ABCD$ вписано рівнобічний трикутник APK так, що вершина K лежить на стороні BC, а P — на CD. KH — висота цього трикутника. Доведіть, що трикутник BHC — рівнобічний.

3.5. Вершини A і B трикутника ABC з прямим кутом C ковзають по сторонам прямого кута з вершиною P. Доведіть, що точка C при цьому переміщується на відрізку.

3.6. Дано кут α з вершиною в точці A і точку M всередині кута. B і C — основи перпендикулярів, проведених з точки M на сторони кута. $MB = a$, $MC = b$. Знайдіть AM.

3.7. З довільної точки M всередині даного кута з вершиною A проведено перпендикуляри MP і MQ на сторони кута. З точки A проведено перпендикуляр AK на відрізок PQ. Доведіть, що $\angle PAK = \angle MAQ$.

3.8. Відстань між основами двох висот BM і BN ромба $ABCD$ вдвічі менша, ніж діагональ BD. Знайдіть кути ромба.

3.9. Дано прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). На його гіпотенузі побудовано квадрат $ABFD$, M — його центр. Доведіть, що $\angle ACM = \angle MCB$.

3.10. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ протилежні кути A і C — прямі. На діагональ AC проведено перпендикуляри BE і DF. Доведіть, що $CE = FA$.

3.11. Усередині кута AOB взято точку M, проекціями якої на сторони кута є точки M_1 і M_2. Доведіть, що

$$S_{OM_1M_2M} \leqslant \frac{1}{2} OM^2 \sin \angle AOB.$$

3.12. Дано квадрат $ABCD$, O — його центр, K — середина BC, M — середина OD. Знайдіть $\angle AMK$.

3.13. Дано трикутник ABC. BH — його висота. У трикутник вписано напівколо з центром O на AC. M і N — точки дотику зі сторонами AB і BC. Доведіть, що $\angle MHB = \angle BHN$.

3.14. До кола проведено дві дотичные. Довести, що довжина перпендикуляра, проведеного з довільної точки кола на хорду, яка з'єднує точки дотику, є середнім пропорційним між довжинами перпендикулярів, проведених з цих точок на дотичні.

3.15. Усередині прямокутника $ABCD$ обрано точку M так, що $\angle BMC + \angle AMD = 180°$. Знайдіть суму кутів BCM і MAD.

3.16. У трикутнику ABC $\angle ACB = 120°$. H — точка перетину висот, O — центр описаного кола, M — середина дуги ACB. Довести, що $HM = MO$.

3.17. Дано квадрат $ABCD$. Точки P і Q лежать відповідно на сторонах AB і BC, причому $BP = BQ$. Нехай H — основа перпендикуляра, проведеного з точки B на відрізок PC. Знайдіть кут DHQ.

3.18. На сторонах AB і CD прямокутника $ABCD$ взято точки K і E так, що $BK = CE$. З точки K проведено перпендикуляр KO на діагональ AC. Знайдіть кут BOE.

3.19. На сторонах AB, BC і AC трикутника ABC взято відповідно точки D, E, F, для яких $DE = BE$ і $FE = CE$. Довести, що центр кола, описаного навколо трикутника ADF, лежить на бісектрисі кута DEF.

Ключова задача 2.

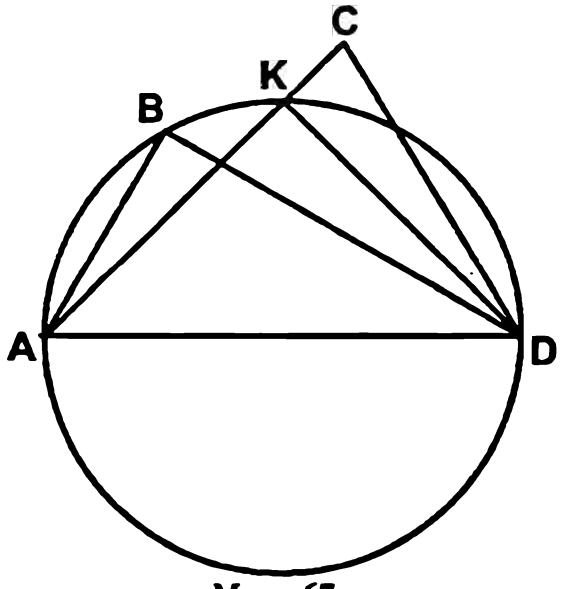
Якщо точки B і C лежать в одній напівплощині відносно прямої AD, причому $\angle ABD = \angle ACD$, то точки A, B, C і D належать одному колу. Довести.

Розв'язання.

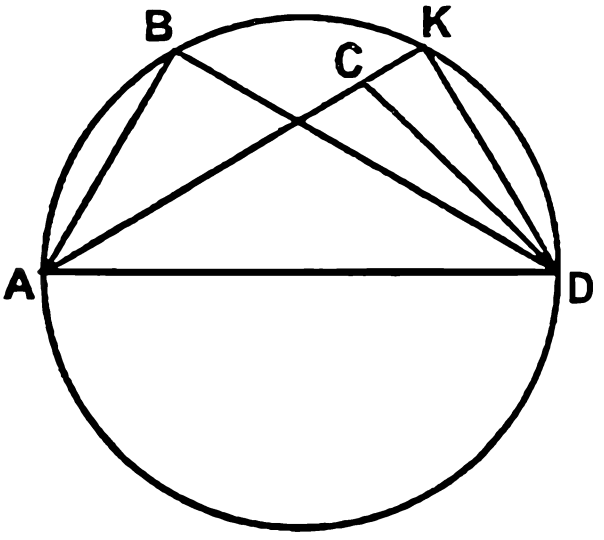
Припустимо, що точка C не лежить на колі, описаному навколо трикутника ABD. Тоді можливі два випадки:

а) C лежить поза даним колом (мал. 67) і

$$\angle ACD = \angle AKD - \angle CDK.$$



Мал. 67



Мал. 68

Але згідно з теоремою про вписаний кут $\angle ABD = \angle AKD$, отже, $\angle ACD < \angle ABD$.

б) C лежить всередині кола (мал. 68). Тут

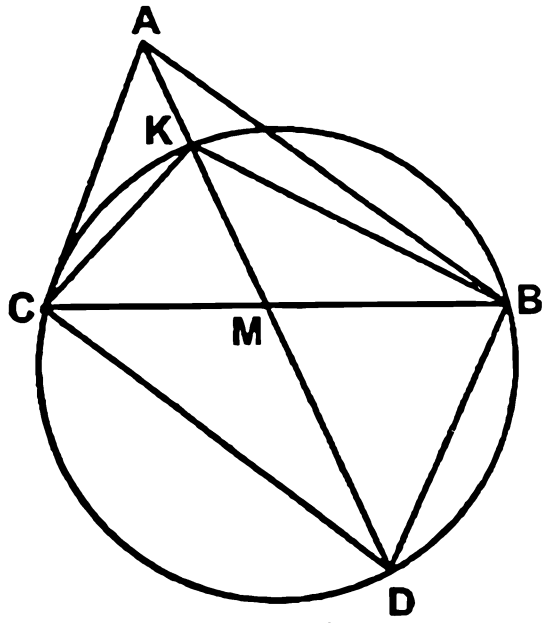
$$\angle ACD = \angle AKD + \angle CDK \text{ и } \angle ACD > \angle ABD.$$

Одержані суперечності й доводять потрібне твердження.

Приклади

Задача 1.

На медіані AM трикутника ABC взято точку K так, що $\angle BKM = \angle ABC$ (мал. 69). Довести, що $\angle CKM = \angle ACB$.



Мал. 69

Розв'язання.

«Подвоїмо» медіану AM (вже знайомий читачеві прийом).

$$\angle BCD = \angle ABC = \angle BKD.$$

Отже, точки C, K, B, D належать одному колу. Тоді $\angle CKD = \angle CBD$ (як такі, що спираються на спільну дугу CD), але $\angle CBD = \angle ACB$. Звідси $\angle CKD = \angle ACB$.

Вправи

3.20. Визначити площу трапеції, у якої довжини основ дорівнюють 10 і 26, а діагоналі перпендикулярні бічним сторонам.

3.21. Знайти геометричне місце основ перпендикулярів, проведених з даної точки A на прямі, що проходять через дану точку B.

3.22. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ проведено діагоналі AC і BD. Відомо, що $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$, і відстань між точками перетину бісектрис трикутників ABD і ACD дорівнює $\sqrt{2}$. Знайти довжину сторони BC.

3.23. У гострокутному трикутнику ABC CC_1 і AA_1 висоти. Довести, що серединний перпендикуляр до C_1A_1 проходить через середину AC.

3.24. У гострокутному трикутнику ABC CC_1 і AA_1 висоти. З точок A і C на пряму A_1C_1 проведено перпендикуляри AF і CK. Довести, що $FC_1 = KA_1$.

3.25. З вершини A квадрата $ABCD$ проведено два промені, які утворюють кут $45°$. Один перетинає сторону BC в точці E, діагональ BD — в точці P, другий — сторону CD в точці F, а діагональ BD — в точці Q. Довести, що $S_{AEF} = 2S_{APQ}$.

3.26. У трикутнику ABC проведено бісектрису BE і висоту AH. $\angle BEA = 45°$. Довести, що $\angle EHC = 45°$.

3.27. Коло, вписане в дельтоїд $ABCD$ ($AB = BC$, $CD = AD$), дотикається його сторін AB, BC і AD відповідно в точках K, M і N. Діагональ AC перетинає відрізок MN в точці P. Довести, що точки A, K, P, N лежать на одному колі.

3.28. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначено точки C_1, A_1, B_1 відповідно. З'ясувалося, що

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} \text{ і } \angle BAC = \angle B_1A_1C_1.$$

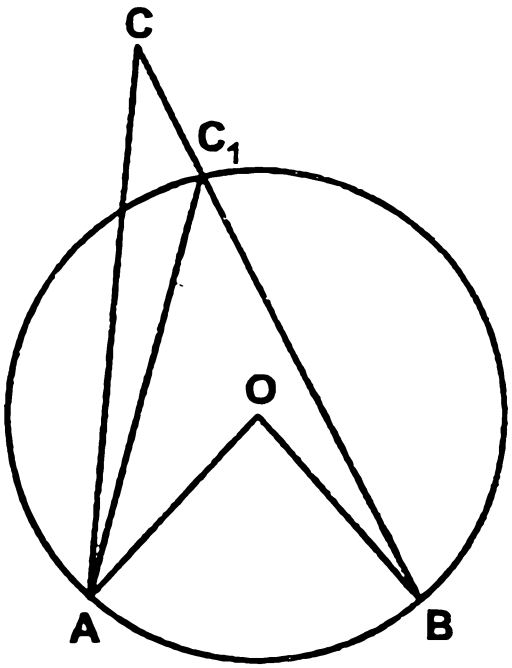
Довести, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні.

3.29. На стороні AB трикутника ABC поза трикутником побудовано квадрат з центром у точці O. На стороні AC побудовано квадрат всередині трикутника з центром у точці

M. Довести, що точки O, M і D (D — основа висоти до сторони BC) лежать на одній прямій.

Ключова задача 3.

Довести: якщо точки O і C знаходяться в одній (у різних) півплощинах відносно прямої AB, причому $OA = OB$ і $\angle AOB = 2\angle ACB$ ($\angle AOB = 2(180° - \angle ACB)$), то точки A, B і C лежать на колі з центром у точці O.



Мал. 70

Доведення.

Розглянемо випадок, коли точки O і C лежать в одній півплощині. Припустимо, що точка C лежить поза колом з центром у точці O і радіусом $OA = OB$ (мал. 70). Тоді

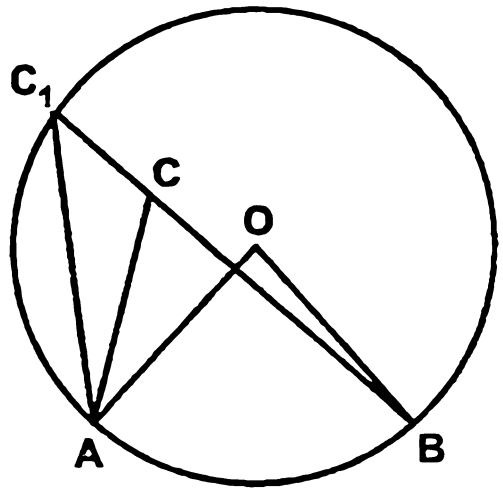
$$\angle AOB = 2\angle AC_1B = 2(\angle ACB + \angle CAC_1).$$

Якщо точка C лежить усередині кола (мал. 71), то

$$\angle AOB = 2\angle AC_1B =$$

$$= 2(\angle ACB - \angle CAC_1).$$

Випадок, коли точки O і C лежать у різних півплощинах, розгляньте самостійно.



Мал. 71

Приклади

Задача 1.

В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $AB = AD = 10$, $\angle BAD = 100°$, $\angle BCD = 130°$. Знайти довжину діагоналі AC.

Розв'язання.

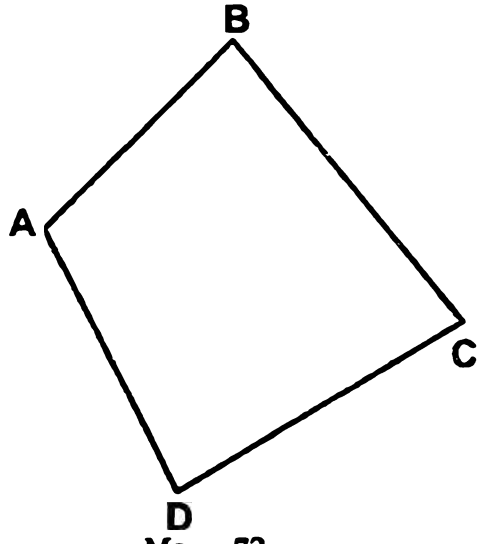
Зазначимо, що $2(180° - \angle BCD) = 100° = \angle BAD$ (мал. 72). Тоді точки B, D і C лежать на колі з центром у точці A.

Відповідь: $AC = 10$.

Вправи

3.30. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) кут ADB удвічі менший, ніж кут ACB. $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Знайти площу трапеції.

3.31. У трикутнику ABC $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 80°$. Усередині трикутника обрано таку точку K, що трикутник BCK — рівнобічний. Знайти $\angle KAB$.



Мал. 72

3.32. Поза рівнобічним трикутником ABC (але всередині кута ACB) обрано точку M так, що $\angle AMC = 20°$ і $\angle BMC = 30°$. Знайти $\angle ACM$.

3.33. Поза рівнобедреним трикутником ABC ($AB = AC$), але всередині кута ABC, обрано точку M так, що $\angle BMC = 40°$, а $\angle BMA = 10°$. Знайти $\angle BAM$, якщо $\angle ABC = 50°$.

3.34. Усередині квадрата $ABCD$ взято таку точку M, що $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$. Знайти $\angle ABM$.

3.35. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle BAC = 25°$, $\angle BCA = 20°$, $\angle BDC = 50°$, $\angle BDA = 40°$. Довести, що $DA = DB = DC$.

Зручно, коли деякий клас задач об'єднує одна ключова ідея. На жаль, така чітка класифікація можлива не завжди. Часто виручають досвід, інтуїція і кмітливість. Гадаємо, що набути такого досвіду читачеві допоможуть подальші приклади і вправи.

Приклади

Задача 1.

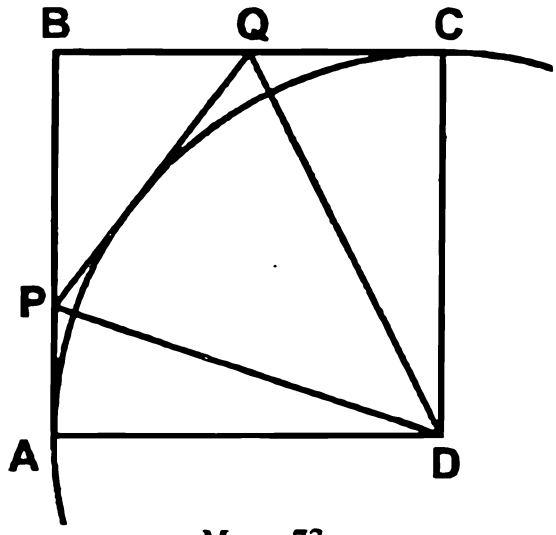
У чотирикутнику три тупих кути. Довести, що з двох його діагоналей більша та, яку проведено з вершини гострого кута.

Розв'язання.

Побудуємо на позначеній діагоналі як на діаметрі коло. Тоді дві інші будуть лежати всередині кола, і відрізок, що їх сполучає, менший, ніж діаметр.

Задача 2.

У квадраті $ABCD$ зі стороною 1 на сторонах AB і BC обрано відповідно точки P і Q так, що периметр трикутника PBQ дорівнює 2. Знайдіть величину кута PDQ.



Мал. 73

Розв'язання.

Проведемо коло з центром у точці D радіуса 1. Очевидно, що вона дотикається сторін квадрата в точках A і C (мал. 73). Будь-яка дотична до дуги AC відсікає від квадрата трикутник, периметр якого дорівнює 2 (ключова задача 2, § 16, глава II). Нехай PQ не дотикається проведеного кола. Якщо PQ не має спільних точок з колом, то проведемо дотичну $P_1Q_1 \parallel PQ$. Периметр трикутника P_1BQ_1 більший, ніж периметр трикутника PBQ — очевидно. З іншого боку, їх периметри дорівнюють по 2. Аналогічно можна одержати суперечність, якщо відрізок PQ перетинає коло. Отже, точка D є центром зовнівписаного кола трикутника PBQ. Маємо

$$\angle PDQ = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle APQ + \angle PQC) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 270^\circ = 45^\circ.$$

Вправи

3.36. Чи можна розмістити рівнобічний трикутник зі стороною 3 всередині круга радіусом $\sqrt[4]{10}$?

3.37. Через точку P, яка лежить на спільній хорді AB двох кіл, що перетинаються, проведено хорду KM першого кола і хорду LN другого кола. Довести, що $\angle NKM = \angle NLM$.

3.38. На одній стороні кута з вершиною в точці O обрано точки A і B, на другій — D і C так, що $OB \cdot OA = OC \cdot OD$. Доведіть, що $\angle BAC = \angle BDC$.

3.39. У гострокутному трикутнику ABC AH_1, BH_2, CH_3 — висоти, H — точка їх перетину. Доведіть, що $AH \cdot HH_1 = BH \cdot HH_2 = CH \cdot HH_3$.

3.40. Відновити квадрат за чотирма точками, кожна з яких лежить відповідно на кожній із сторін квадрата.

3.41. На одній стороні кута з вершиною O дано точки A і B. Знайдіть на другій стороні таку точку X, щоб кут AXB був найбільшим.

3.42. Визначте кути трикутника, в якому медіана, бісектриса і висота, що виходять з однієї вершини трикутника, ділять відповідний кут на чотири рівні частини.

3.43. Висота і медіана, які виходять з однієї вершини трикутника і розміщені всередині нього, утворюють із сторонами трикутника, що виходять з тієї самої вершини, рівні кути. Довести, що даний трикутник прямокутний або рівнобедрений.

3.44. Доведіть, що квадрат бісектриси кута трикутника дорівнює різниці між добутком бічних сторін і добутком відрізків основи.

3.45. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Бісектриси кутів B і C перетинаються на стороні AD. Доведіть, що $AB + CD = AD$.

3.46. Довжини основи CD, діагоналі BD і бічної сторони AD трапеції $ABCD$ рівні між собою і дорівнюють p. Довжина бічної сторони BC дорівнює q. Знайдіть довжину діагоналі AC.

3.47. Побудуйте трикутник ABC за точкою A, центром описаного кола і точкою перетину бісектриси кута A зі стороною BC.

3.48. Побудуйте прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) за точками A і B і точкою M, яка лежить на бісектрисі кута C.

3.49. У трикутнику ABC $\angle A > 90°$. На стороні BC знайдіть таку точку X, що $AX = \sqrt{BX \cdot XC}$.

3.50. Усередині кута з вершиною O взято точку. Провести через неї пряму так, щоб трикутник, який відрізано від кута цією прямою, мав заданий периметр.

3.51. У трикутнику ABC з кутом при вершині B, що дорівнює 120°, проведено бісектрису BD. Знайдіть відношення сторін трикутника AB і AC, якщо відомо, що $BD : DC = k$.

3.52. У трикутнику ABC проведено бісектриси AA_1, BB_1 і CC_1. Знайдіть суму кутів BC_1B_1 і BA_1B_1, якщо відомо, що кут ABC дорівнює 120°.

3.53. У трикутнику ABC $\angle B = 100°$, CE — бісектриса. На стороні AC обрано точку D так, що $\angle DBC = 20°$. Знайдіть величину кута CED.

§4. Застосування центральної симетрії

Нагадаємо деякі визначення і властивості.

1. Точки A і A' називають ***симетричними*** відносно точки O, якщо O — середина відрізка AA'.

2. Перетворення фігури, коли кожній точці цієї фігури відповідає точка, симетрична їй відносно заданої точки O, називають ***центральною симетрією*** з центром O.

3. Центральна симетрія є рухом. Отже, симетричні фігури рівні.

4. Обмежена фігура не може мати більше одного центра симетрії.

5. Якщо прямі l_1 і l_2 симетричні відносно точки O, то $l_1 \parallel l_2$.

6. Якщо чотирикутник має центр симетрії, то він є паралелограм.

Приклади

Задача 1.

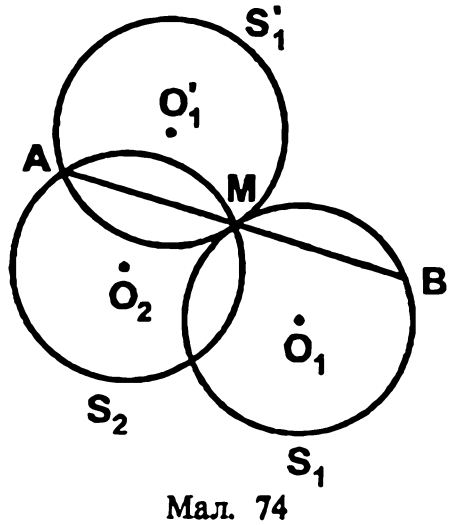
Два кола перетинаються в точці M. Провести через M пряму, яка перетинає коло в точках A і B так, що $AM = MB$.

Розв'язання.

Зауважимо, що при симетрії кола S_1 (мал. 74) відносно точки M точка B переходить у точку A. Отже, точку A можна одержати як перетин кіл S_2 і S_1'. B — точка перетину S_1 і прямої AM.

Задача 2.

Коло перетинає сторони BC, CA, AB трикутника ABC в точках A_1 і A_2, B_1, і B_2, C_1 і C_2 відповідно. Доведіть: якщо перпендикуляри до сторін трикутника, проведені через точки A_1, B_1 і C_1, перетинаються в одній точці, то й перпендикуляри, проведені до сторін



Мал. 74

через A_2, B_2 і C_2, також перетинаються в одній точці.

Розв'язання.

Перпендикуляри, проведені в точках A_1, B_1, C_1, симетричні перпендикулярам відповідно в точках A_2, B_2, C_2 відносно центра кола O (доведіть). Отже, фігури, утворені цими трійками перпендикулярів, симетричні відносно точки O. Тобто перпендикуляри в точках A_2, B_2, C_2 перетинаються в точці, симетричній M (M — перетин перпендикулярів у точках A_1, B_1, C_1) відносно O.

Вправи

4.1. Провести через дану точку пряму так, щоб вона поділила площу даного паралелограма навпіл.

4.2. Вершини одного паралелограма лежать на сторонах іншого — по одній вершині на кожній стороні. Довести, що діагоналі обох паралелограмів перетинаються в одній точці.

4.3. Дві прямі, які проходять через центр паралелограма $ABCD$, перетинають сторону BC в точках M і N, а сторону AD — в точках K і F. Довести, що $MN = KF$.

4.4. M — середина відрізка, який сполучає центри двох однакових кіл. Прямі, що проходять через точку M, перетинають одне з кіл у точках A і B, а друге — в K і F. Довести, що $AB = KF$.

4.5. Паралелограм $ABCD$ поділено його діагоналями на трикутники AOB, BOC, COD і DOA. K, L, M, N — точки перетину медіан цих трикутників. Довести, що $KLMN$ — паралелограм.

4.6. Усередині кола дано точку M. Через цю точку проведіть хорду AB так, що $AM = MB$.

4.7. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці і кінцями на двох даних прямих.

4.8. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці і кінцями на даному колі і даній прямій.

4.9. Усередині гострого кута задано точки A і C. Побудуйте паралелограм $ABCD$ так, щоб точки B і D лежали на сторонах кута.

4.10. Побудуйте квадрат з центром у даній точці O і точками M і N на двох сусідніх сторонах квадрата.

4.11. Побудуйте квадрат з центром у даній точці O і точками M і N на двох протилежних сторонах або їх продовженнях.

4.12. Побудуйте ромб з центром у даній точці і трьома вершинами на трьох даних прямих.

4.13. Побудуйте ромб з центром у даній точці і трьома вершинами на трьох даних колах.

4.14. Побудувати паралелограм $ABCD$, вершини якого A і C — задані точки, а вершини B і D лежать відповідно на прямих b і c.

4.15. Дано пряму a і два кола з різних боків від неї. На прямій взято відрізок CD. Побудуйте трикутник ABC так, щоб точки A і B лежали на колах, а відрізок CD був медіаною.

4.16. Дано два концентричних кола S_1 і S_2. Проведіть пряму, на якій ці кола вирізають три рівні відрізки.

4.17. Побудувати ромб, центр якого лежить у даній точці, а три сторони або їх продовження дотикаються трьох заданих кіл.

4.18. Доведіть, що прямі, проведені через середини сторін вписаного чотирикутника перпендикулярно протилежним сторонам, перетинаються в одній точці.

4.19. Нехай P — середина сторони AB опуклого чотирикутника $ABCD$. Доведіть: якщо площа трикутника PCD дорівнює половині площі чотирикутника $ABCD$, то $BC \parallel AD$.

§5. Застосування осьової симетрії

1. Точки A і A' називають ***симетричними*** відносно прямої l, якщо пряма l перпендикулярна відрізку AA' і проходить через його середину.

2. Перетворення фігури, завдяки якому кожній точці цієї фігури відповідає точка, симетрична їй відносно заданої прямої l, називають ***осьовою симетрією*** з віссю l.

3. Осьова симетрія є рухом, отже, симетричні фігури рівні.

Приклади

Задача 1.

У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіана $AM = m$ проведена до меншого катета й утворює з більшим кут 15°. Знайти площу трикутника.

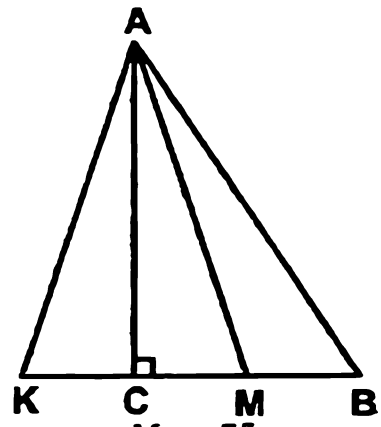
Розв'язання.

Побудуємо точку K, симетричну точці M відносно прямої AC (мал. 75). Тоді

$$\Delta KAC = \Delta MAC \text{ і } S_{KAC} = S_{MAC}.$$

Маємо $S_{ABC} = 2S_{AMC} = S_{KAM} =$

$$= \frac{1}{2} m^2 \sin 30° = \frac{m^2}{4}.$$



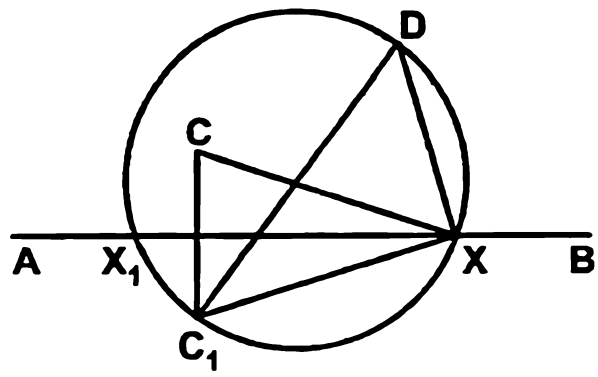
Мал. 75

Задача 2.

Дано пряму AB і точки C і D з одного боку від неї. На прямій AB побудувати таку точку X, щоб $|\angle AXC - \angle BXD| = 90°$.

Розв'язання.

Відобразимо точку C симетрично відносно прямої AB, одержимо точку C_1.



Мал. 76

На відрізку DC_1 як на діаметрі будуємо коло. Воно перетинає пряму AB в точках X_1 і X (мал. 76), які і є шуканими. Покажемо це.

$$90^\circ = \angle C_1XD = \angle C_1XA + \angle AXD =$$

$$= \angle AXC + 180^\circ - \angle DXB, \text{ тобто}$$

$$90^\circ = 180^\circ + \angle AXC - \angle DXB,\ \angle DXB - \angle AXC = 90^\circ.$$

Для точки X_1 міркування аналогічні.

Вправи

5.1. Дано пряму MN і точки A і B в різних півплощинах відносно MN. Через A і B проведіть промені так, щоб кут між ними ділився MN навпіл.

5.2. Точки A і B лежать з одного боку від прямої l. Знайдіть на прямій l таку точку X, щоб промені XA і XB утворювали з прямою l однакові кути.

5.3. Побудувати трикутник ABC, якщо задано точки A і B і пряму l, на якій лежить бісектриса кута C.

5.4. На кожній стороні кута MON взято по дві точки A, B і A_1, B_1 так, що $OA = OA_1$ і $OB = OB_1$. Довести, що прямі A_1B і AB_1 перетинаются на бісектрисі кута MON.

5.5. У колі проведено дві неоднакові паралельні хорди. За допомогою однієї лінійки знайдіть середини цих хорд.

5.6. Через вершину A трикутника ABC і точку D, яка лежить на стороні BC, проведено пряму. Знайдіть на цій прямій таку точку X, з якої відрізки BD і DC було б видно під однаковими кутами.

5.7. Побудувати трикутник ABC, якщо дано пряму AB і серединні перпендикуляри до сторін BC і CA.

5.8. Побудувати трикутник ABC, якщо дано вершину A і прямі, на яких лежать бісектриси кутів B і C.

5.9. Побудувати паралелограм $ABCD$ за вершиною D і серединними перпендикулярами до сторін AB і BC.

5.10. Побудувати ромб $ABCD$ за серединами M і N сторін AB і BC і точкою E, що лежить на прямій AC.

5.11. Побудувати трикутник ABC за двома сторонами AB і AC і різницею кутів B і C.

5.12. Побудувати трапецію за бічними сторонами, основою і різницею кутів при цій основі.

5.13. Дано кут ABC, який дорівнює $45°$, і точки M і N всередині кута. Побудувати рівнобедрений трикутник, вершина якого лежить на одній стороні, основа — на другій, а бічні сторони проходять через точки M і N.

5.14. Дано пряму l і точки A і B з одного боку від неї. Знайдіть на прямій l таку точку X, щоб сума $AX + XB$ була мінімальною.

5.15. Точки A і B розміщено з різних боків відносно прямої l. Знайдіть на прямій l таку точку X, щоб величина $|AX - XB|$ була найбільшою.

5.16. Довести, що з усіх трикутників з постійними основою і висотою, проведеною до цієї основи, рівнобедрений має найменший периметр.

5.17. На стороні AC гострокутного трикутника ABC дано точку M. На сторонах AB і BC знайдіть такі точки N і P, щоб периметр трикутника MNP був найменшим.

5.18. Дано гострий кут ABC і точку P всередині нього. Знайдіть на сторонах BA і BC точки M і N, щоб периметр трикутника MPN був найменшим.

5.19. Дано гострий кут ABC і точки M і N всередині нього. Знайдіть на сторонах кута такі точки P і Q, щоб периметр многокутника $PMNQ$ був найменшим.

5.20. Доведіть, що площа чотирикутника $ABCD$ не перевищує $\dfrac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{2}$.

5.21. Точка M лежить на діаметрі AB кола радіуса R. Хорда CD проходить через M і перетинає AB під кутом $45°$. Доведіть, що $CM^2 + DM^2 = 2R^2$.

5.22. Побудувати ромб так, щоб одна його діагональ мала задану довжину d і належала даній прямій l, кінці другої діагоналі належали відповідно прямій і даному колу.

5.23. Побудувати квадрат, у якого одна діагональ лежить на даній прямій, а кінці другої діагоналі належать відповідно даним прямій і колу.

5.24. Побудувати чотирикутник $ABCD$, у якого діагональ AC є бісектрисою кута A, знаючи довжини його сторін.

5.25. Дано пряму AB і точки C і D з одного боку від неї. На прямій AB побудуйте таку точку X, щоб $\angle AXC = 2\angle BXD$.

5.26. Кола з центрами O і O_1 розміщено з одного боку від прямої AB. На прямій AB знайдіть таку точку X, щоб дотичні, проведені з неї до двох даних кіл, складали з прямою AB однакові кути.

5.27. Через точку M основи AC рівнобедреного трикутника ABC проведено пряму, яка перетинає прямі BA і BC в точках N і P. Доведіть, що

$$\frac{NA}{NM} = \frac{PC}{PM}.$$

5.28. На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC взято точку M, яка відрізняється від C. Доведіть, що

$$MA + MB > CA + CB.$$

§6. Застосування перетворення повороту

1. Перетворення фігури F на фігуру F', коли кожна точка X фігури F переходить в таку точку X' фігури F', що $X'O = XO$ і $\angle X'OX = \alpha$, де O — задана точка і α — даний кут, $0 < \alpha < \pi$, називають ***перетворенням повороту фігури*** F навколо точки O на кут α.

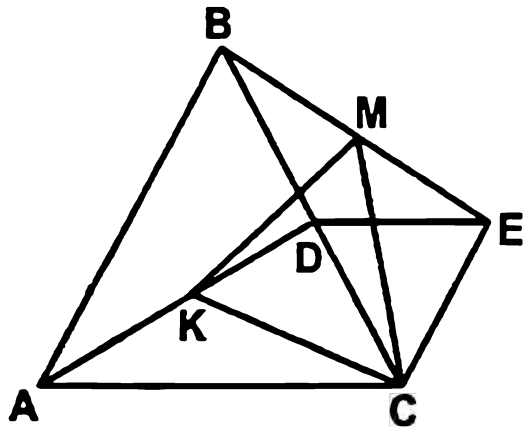
2. Якщо точка X' — образ точки X при повороті навколо точки O на кут α, то цей факт будемо записувати так: $R_0^{\alpha}(X) = X'$.

3. Перетворення повороту є рух.

Приклади

Задача 1.

На стороні BC рівнобічного трикутника ABC позначено точку D і на відрізку CD як на стороні побудовано рівнобічний трикутник CDE поза трикутником ABC. Точки K і M — відповідно середини відрізків AD і BE. Доведіть, що трикутник CKM — рівнобічний.



Мал. 77

Розв'язання.

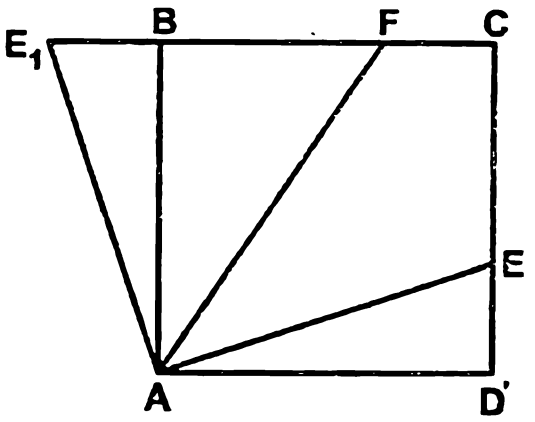
Розглянемо перетворення повороту з центром у точці C на кут 60° (мал. 77). Тоді $R_C^{60^\circ}(B) = A$, $R_C^{60^\circ}(E) = D$. Звідси образом відрізка BE за цим перетворенням буде відрізок AD. Оскільки M і K — середини цих відрізків, то $R_C^{60^\circ}(M) = K$. Отже, $CK = CM$, $\angle KCM = 60^\circ$, тобто трикутник CKM — рівнобічний.

Задача 2.

На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку E. Бісектриса кута BAE перетинає сторону BC в точці F. Довести, що $AE = ED + BF$.

Розв'язання.

Розглянемо поворот з центром A на кут 90°. Тоді $R_A^{90^\circ}(D) = B$, $R_A^{90^\circ}(E) = E_1$, причому E_1 лежить на BC (мал. 78). Тоді $DE = BE_1$ (нагадуємо, що поворот є рух, отже, переводить фігуру в рівну їй). Маємо:



Мал. 78

$$E_1F = E_1B + BF = DE + BF.$$

Оскільки $\angle E_1AB = \angle EAD$, то

$$\angle E_1AF = \angle FAD.$$

Але $\angle FAD = \angle BFA$, отже, $\angle E_1AF = \angle E_1FA$. Звідси $AE_1 = E_1F = DE + BF$.

Вправи

6.1. Дано кут ABC і всередині нього точку M. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник з вершиною в точці M так, щоб дві інші його вершини лежали на сторонах кута.

6.2. Дано кут ABC і всередині нього точку M. Побудувати рівнобічний трикутник з вершиною в точці M так, щоб дві інші його вершини лежали на сторонах кута.

6.3. У даний квадрат впишіть рівнобічний трикутник так, щоб одна з його вершин збіглася з вершиною квадрата, а дві інші належали сторонам квадрата.

6.4. Дано два кола і точку M поза цими колами. Побудуйте прямокутний рівнобедрений трикутник з вершиною в точці M так, щоб дві інші вершини лежали на даних колах.

6.5. Усередині трикутника ABC позначено точку P. Знайдіть на сторонах BC і AC такі точки K і M, що $PK = PM$ і $\angle KPM = 45^\circ$.

6.6. Дано коло, квадрат і точку P. Побудуйте рівнобедрений трикутник PAB ($PA = PB$), вершини A і B якого належать колу і стороні квадрата, а $\angle APB = 45^\circ$.

6.7. Через центр квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що відрізки цих прямих, які знаходяться всередині квадрата, однакові.

6.8. Через центр рівнобічного трикутника проведено дві прямі, кут між якими дорівнює 60°. Доведіть, що відрізки цих прямих, що знаходяться всередині трикутника, однакові.

6.9. Побудуйте рівнобічний трикутник так, щоб вершини належали трьом даним паралельним прямим.

6.10. Побудуйте квадрат так, щоб три його вершини належали трьом даним паралельним прямим.

6.11. На сторонах AB і AC трикутника ABC побудовано квадрати $ABNM$ і $ACQP$ на зовнішню сторону. Доведіть, що $MC = BP$, $MC \perp BP$.

6.12. На сторонах AB і AD квадрата $ABCD$ позначено точки K і M відповідно так, що $AK + AM = AB$. Знайдіть кут KOM, де O — центр квадрата.

6.13. На сторонах AB і AC рівнобічного трикутника ABC позначено точки K і M відповідно так, що $AK + AM = AB$. Знайдіть кут KOM, де O — центр трикутника.

6.14. У рівнобедреній трапеції $ABCD$ на бічних сторонах AB і CD позначено точки K і M відповідно так, що $AK = CM$. Менша основа BC трапеції дорівнює бічній стороні, а гострий кут трапеції дорівнює 60°. Знайдіть кут KOM, де O — середина AD.

6.15. У ромбі $ABCD$ з тупим кутом A, що дорівнює 120°, на сторонах AB і AD позначено точки K і M відповідно так, що $BK = AM$. Знайдіть кут KCM.

6.16. Впишіть у коло два однакових трикутника з відповідно перпендикулярними сторонами.

6.17. Усередині квадрата $ABCD$ взято точку K і на відрізку AK як на стороні побудовано квадрат $AKEM$, сторона KE якого перетинає сторону AD квадрата $ABCD$. Доведіть, що $BK = DM$.

6.18. На прямій l взято послідовно точки A, B і C, а на відрізках AB і AC з різних боків від прямої l побудовано рівнобічні трикутники ABD і ACN. Доведіть, що середини

K і L відповідно відрізків DC і BN і точка A є вершинами рівнобічного трикутника.

6.19. На прямій l взято послідовно точки A, C, E. На сторонах AC і CE з одного боку від прямої l побудовано рівнобічні трикутники ABC і CDE. Точки K і M — середини відрізків AD і BE відповідно. Доведіть, що трикутник CKM — рівнобічний.

6.20. Кут C трикутника ABC дорівнює 120°. Довести, що $l_c = \frac{ab}{a+b}$, де l_c — довжина бісектриси, яка виходить з вершини C, $AC = b$, $BC = a$.

6.21. З точки P, яку розміщено всередині рівнобічного трикутника ABC, сторону AB видно під кутом 150°. Довести, що відрізки AP, BP, CP можуть слугувати сторонами прямокутного трикутника.

6.22. Усередині рівнобічного трикутника ABC обрано точку P так, що $AP^2 + BP^2 = CP^2$. Довести, що

$$\angle APB = 150°.$$

§7. Застосування гомотетії

1. ***Гомотетія*** з центром O і коефіцієнтом k (який відрізняється від нуля) — це перетворення, коли кожній точці X ставиться у відповідність така точка X', що $\vec{OX'} = k\vec{OX}$.

2. Гомотетія відрізок переводить у відрізок.

3. Гомотетія зберігає величину кута.

4. При гомотетії пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе.

Приклади

Задача 1.

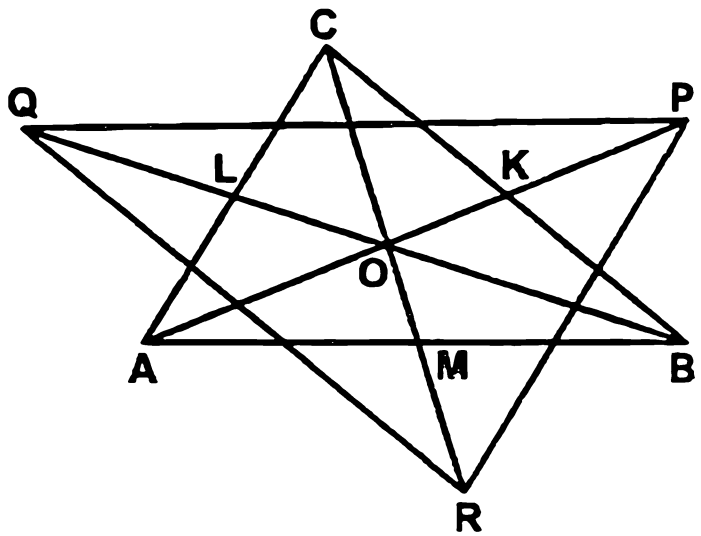
На продовженнях медіан AK, BL і CM трикутника ABC взято точки P, Q, R так, що $KP = \frac{1}{2}AK$, $LQ = \frac{1}{2}BL$, $MR = \frac{1}{2}CM$. Знайти S_{PQR}, якщо $S_{ABC} = 1$.

Розв'язання.

Зауважимо, що

$$\frac{OP}{AO} = \frac{OQ}{OB} = \frac{OR}{OC} = \frac{5}{4}$$

(мал. 79).



Мал. 79

Це означає, що трикутник PQR гомотетичний трикутнику ABC з коефіцієнтом гомотетії $k = -\frac{5}{4}$. Тоді

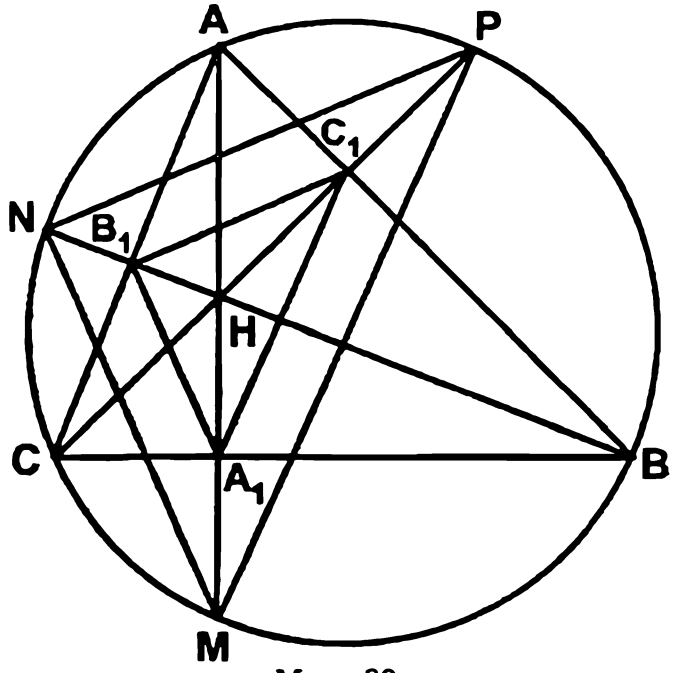
$$S_{PQR} = \frac{25}{16}S_{ABC} = \frac{25}{16}.$$

Відповідь: $\frac{25}{16}$.

Задача 2.

AA_1, BB_1, CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC. Довести, що радіус кола, описаного навколо трикутника

$A_1B_1C_1$ вдвічі менший, ніж радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.



Мал. 80

Розв'язання.

Нехай M, N і P — точки перетину висот з колом, описаним навколо трикутника ABC (мал. 80). Доведемо, що

$$HA_1 = A_1M.$$

Справді,

$$\angle C_1CB = \angle BAA_1 = 90^\circ - \angle ABA_1.$$

Але кути BAA_1 і MCB рівні як вписані, що спираються на спільну дугу MB. Тоді $\angle MCA_1 = \angle HCA_1$ і оскільки $CA_1 \perp HM$, то трикутник HCM рівнобедрений і $HA_1 = A_1M$. Так само $HB_1 = B_1N$ і $HC_1 = C_1P$. Тепер зрозуміло, що трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику MNP з коефіцієнтом гомотетії $k = 2$ і $R_{HNP} = R_{ABC} = 2R_{A_1B_1C_1}$.

Вправи

7.1. Через точки дотику двох кіл проведено дві січні, і їх другі точки перетину з кожним колом з'єднано хордами. Довести, що ці хорди паралельні.

7.2. Два кола дотикаються в точці K. Пряма, яка проходить через точку K, перетинає ці кола в точках A і B. Довести, що дотичні до кіл, проведені через точки A і B, паралельні.

7.3. Два кола дотикаються внутрішньо, причому менше проходить через центр більшого. Довести, що будь-яку хорду більшого кола, яке проходить через точки дотику, менше коло поділяє навпіл.

7.4. Знайти геометричне місце точок — середин хорд даного кола, які виходять з однієї точки цього кола.

7.5. Два кола дотикаються внутрішньо в точці O. У довільній точці M внутрішнього кола проведено до неї дотичну, яка перетинає друге коло в точках A і B. Довести, що $\angle AOM = \angle MOB$.

7.6. Дано кут ABC і точку P всередині нього. Провести через точку P пряму так, щоб її відрізок усередині кута ділився у відношенні 1:2.

7.7. Дано кут ABC і точку M всередині нього. Побудуйте коло, яке дотикається сторін кута і проходить через точку M.

7.8. Усередині кута AOB дано точку M. Знайти на промені OA точку, однаково віддалену від M і променя OB.

7.9. Усередині кута AOB дано точку M. Знайти на промені OA точку, відстань від якої до точки M вдвічі більша, ніж відстань до променя OB.

7.10. На площині дано точки A і B і пряму l. За якою траєкторією рухається точка перетину медіан трикутників ABC, якщо точка C рухається по прямій l?

7.11. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює R. Обчисліть радіус кола, описаного навколо трикутника, вершини якого є серединами медіан даного.

7.12. Дано трикутник ABC і довільну точку P. Довести, що точки, симетричні точці P відносно середин сторін ABC, є вершинами трикутника, рівного даному.

7.13. Довести, що пряма, яка проходить через точки перетину діагоналей і бічних сторін трапеції, ділить її основу навпіл.

7.14. Доведіть, що точки, симетричні довільній точці відносно середин сторін квадрата, є вершинами деякого квадрата.

7.15. Побудувати трикутник за периметром і двома кутами.

7.16. Побудувати трикутник за двома кутами і радіусом описаного кола.

7.17. Побудувати трикутник за відношенням двох сторін, величиною кута між ними і радіусом вписаного кола.

7.18. Впишіть у даний трикутник інший трикутник, сторони якого були б паралельними трьом даним прямим.

7.19. Впишіть у даний трикутник квадрат, дві вершини якого лежать на основі трикутника, а дві інші — на бічних сторонах.

7.20. Вписати у даний трикутник ABC прямокутник з відношенням сторін 2:5 так, щоб більша сторона прямокутника належала б основі AC, а дві вершини лежали б на сторонах BA і BC.

7.21. Доведіть, що точка перетину медіан M, точка перетину висот H і центр описаного кола O трикутника ABC належать одній прямій, причому $HM = 2OH$ (пряма Ейлера).

§8. Метод координат

1. Якщо точка A має координати x_1 і y_1, B — x_2 і y_2, то $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

2. Якщо точка M — середина відрізка AB, то її координати $\frac{x_1 + x_2}{2}$ і $\frac{y_1 + y_2}{2}$.

3. Рівняння кола з центром у точці $K(a; b)$ і радіусом R має вигляд $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

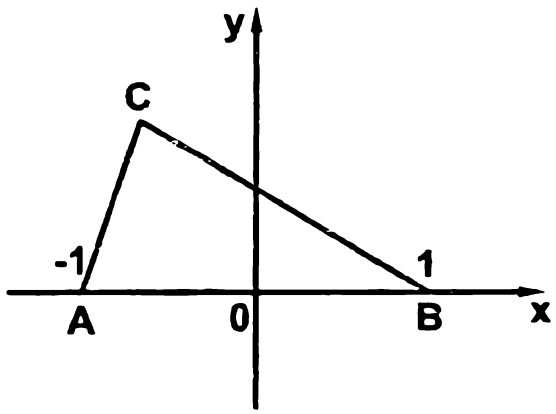
4. Загальне рівняння прямої $ax + by + c = 0$, де $a^2 + b^2 \neq 0$.

5. Рівняння невертикальної прямої $y = kx + l$.

Приклади

Задача 1.

Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до вершин A і B трикутника ABC дорівнює квадрату відстані до третьої його вершини — точки C.



Мал. 81

Розв'язання.

У задачах на метод координат важливо вдало, а точніше, вигідно обрати систему координат. У нашій задачі зручно взяти середину відрізка AB — точку O — як початок відліку і «покласти» відрізок AB на вісь абсцис (мал. 81). Виберемо одиничний відрізок так, щоб A $(-1; 0)$ і B $(1; 0)$. Нехай координати точки $C(a; b)$, а точка $M(x; y)$ належить шуканому ГМТ. Тоді $MA^2 + MB^2 = MC^2$. Причому останнє можна вважати необхідною і достатньою умовою належності точки M шуканому ГМТ. Маємо:

$$(x + 1)^2 + y^2 + (x - 1)^2 + y^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Після відповідних перетворень дістанемо:

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = 2(a^2 + b^2 - 1).$$

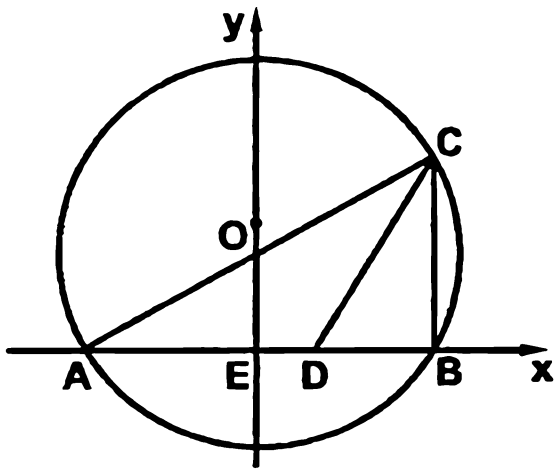
Тепер зрозуміло: якщо $a^2 + b^2 < 1$, то шукане ГМТ — порожня множина.

Якщо $a^2 + b^2 = 1$, то $(x + a)^2 + (y + b)^2 = 0$, і ГМТ складається з однієї точки $D(-a; -b)$, симетричної точці C відносно початку координат.

Якщо $a^2 + b^2 > 1$, то маємо коло з центром у точці $D(-a; -b)$ і радіусом $\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2}$.

Задача 2.

У трикутнику ABC $\angle ACB = 60°$, а радіус кола, описаного навколо цього трикутника, дорівнює $R = 2\sqrt{3}$. На стороні AB взято точку D так, що $AD = 2DB$ і при цьому $CD = 2\sqrt{2}$. Знайдіть площу трикутника ABC.



Мал. 82

Розв'язання.

Маємо

$$AB = 2R \sin 60° = 6.$$

Тоді $AD = 4$, $DB = 2$. Оберемо систему координат як у попередній задачі (мал. 82). Тоді координати точки $D(1; 0)$. Оскільки $\angle AOB = 120°$, то $OE = \sqrt{3}$, а координати точки $O(0; \sqrt{3})$. Нехай координати точки $C(x; y)$. Вона лежить на двох колах: одне з центром у точці O і радіусом $2\sqrt{3}$, друге — з центром у точці D радіусом $\sqrt{2}$. Маємо систему

$$\begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 12, \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо $y = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$. Зауважимо, що $|y|$ — це довжина висоти, яка виходить з точки C трикутника ABC. Тоді $S = \frac{1}{2} AB \cdot |y| = 3\sqrt{2}$.

Відповідь: $3\sqrt{2}$.

Вправи

8.1. Знайдіть множину точок площини, різниця квадратів відстаней від яких до двох даних точок постійна.

8.2. На площині дано точки A і B. Знайдіть множину точок площини, віддалених від A на відстань вдвічі більшу, ніж від B.

8.3. На площині дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок M таких, що $AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$.

8.4. На площині дано дві точки A і B. Точка C переміщується в площині так, що довжина медіани AD трикутника ABC залишається незмінною. Знайдіть множину точок C.

8.5. На площині дано точки A і B. Знайдіть множину C таких точок площини, щоб у трикутнику ABC медіана AD дорівнювала стороні BC.

8.6. Знайдіть ГМТ площини, сума квадратів відстаней від яких до вершин даного трикутника — величина постійна.

8.7. Знайдіть множину точок площини, сума квадратів відстаней від яких до двох протилежних вершин даного прямокутника дорівнює сумі квадратів відстаней до двох інших його вершин.

8.8. На даному відрізку AB береться довільна точка C. З одного боку від AB на відрізках AC і CB будують квадрати. Знайдіть множину середин відрізків, які сполучають центри цих квадратів.

8.9. Коло вписано в ромб $ABCD$ з кутом 45°. Довести, що для будь-якої точки M кола має місце рівність $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \frac{5}{2}AB^2$.

8.10. Коло вписано в ромб з кутом 60°. Відстань від центра кола до найближчої вершини дорівнює 1. Доведіть, що для будь-якої точки P кола має місце рівність $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 11$.

8.11. У трикутнику ABC на стороні BC обрано точку D. Доведіть, що має місце рівність

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC =$$

$$= BC \cdot DC \cdot BD.$$

8.12. Дано трикутник ABC, M — його центроїд. Доведіть, що для будь-якої точки X площини має місце рівність

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3XM^2.$$

8.13. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ сторони AB і CD продовжено до їх перетину в точці K. Доведіть, що $MK^2 = MB^2 + MC^2$, де M — довільна точка кола, описаного навколо шестикутника.

8.14. У квадрат $ABCD$ вписано коло одиничного радіуса. Довести, що для будь-якої точки M цього кола має місце рівність $MA^2 \cdot MC^2 + MB^2 \cdot MD^2 = 10$.

8.15. У круг вписано трапецію $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$). A — довільна точка прямої, що містить діаметр, паралельний основам трапеції. Довести, що

$$AM^2 + AQ^2 = AN^2 + AP^2.$$

8.16. Доведіть теорему про властивості сторін і діагоналей паралелограма: сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

8.17. На прямій l дано три точки A, B і C так, що точка B лежить між A і C. З одного боку від прямої l побудовано рівнобічні трикутники AMB і BNC. Доведіть, що середина відрізка MC, середина відрізка NA і точка B є вершинами рівнобічного трикутника.

8.18. Хорда AB стягує дугу кола, яка дорівнює 120°. Точка C лежить на цій дузі, а точка D — на хорді AB. $AD = 2$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$. Знайдіть площу трикутника ABC.

8.19. У паралелограмі $ABCD$ на діагоналях AC і BD взято відповідно точки P і Q так, що $AP : PC = 2 : 3$, $BQ : QD = 1 : 4$. Знайдіть PQ, якщо $AB = 5$, $AD = 3$, $\angle ADB = 90°$.

§9. Застосування векторів

1. Якщо M — середина відрізка AB, то

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

2. Для того, щоб точки A, B і C належали одній прямій, необхідно і достатньо $\vec{XB} = \alpha\vec{XA} + \beta\vec{XC}$, де X — довільна точка, а $\alpha + \beta = 1$.

3. Якщо M — точка перетину медіан трикутника ABC, а X — довільна точка, то

$$\vec{XM} = \frac{1}{3}(\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC}).$$

4. Щоб з попарно неколінеарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна було скласти трикутник, необхідно і достатньо $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

5. Для того, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були перпендикулярними, необхідно і достатньо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Приклади

Задача 1.

Доведіть, що з медіан трикутника можна скласти трикутник.

Розв'язання.

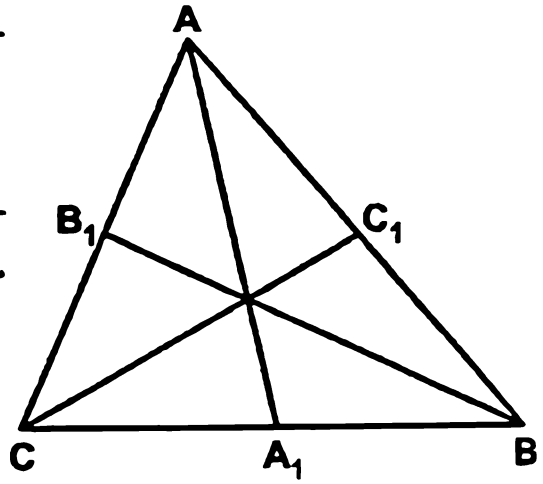
Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — медіани трикутника ABC (мал. 83). Тоді

$$\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{CA}),$$

$$\vec{BB_1} = \frac{1}{2}(\vec{BC} - \vec{AB}),$$

$$\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{CA} - \vec{BC}).$$

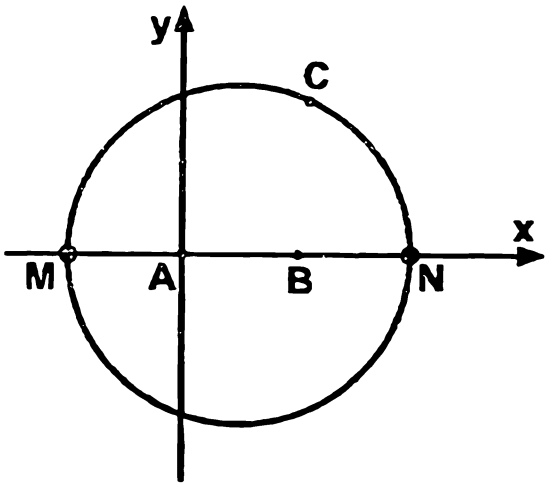
Звідси $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.



Мал. 83

Задача 2.

На площині дано точки A і B. Знайти таку множину точок C цієї площини, що медіани трикутника ABC, проведені з вершин A і B, перпендикулярні.



Мал. 84

Розв'язання.

Введемо систему координат так, що $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ (мал. 84). Нехай $C(x; y)$.

Тоді $A_1\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}\right)$ і $B\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}\right)$. Маємо

$$\vec{AA_1} = \left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}\right), \quad \vec{BB_1} = \left(\frac{x-2}{2}; \frac{y}{2}\right).$$

З умови перпендикулярності медіан одержуємо

$$\vec{AA_1} \cdot \vec{BB_1} = \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-2}{2} + \frac{y^2}{4} = 0.$$

Звідси $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$.

Отже, точка C належить колу з центром у середині відрізка AB і радіусом $\frac{3}{2}AB$. Доведення того, що кожна точка (за винятком M і N) кола задовольняє умову, ми залишаємо читачеві.

Вправи

9.1. Точка перетину середніх ліній чотирикутника збігається з точкою перетину його діагоналей. Довести, що чотирикутник — паралелограм.

9.2. Довести, що в чотирикутнику відрізок, який сполучає середини діагоналей, проходить через точку перетину середніх ліній і ділиться цією точкою навпіл.

9.3. Точка M — середина відрізка AB, точка M' — середина відрізка $A'B'$. Довести, що середини відрізків AA', BB' і MM' лежать на одній прямій.

9.4. Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить їх у відношенні 2:1, рахуючи від вершини.

9.5. Доведіть, що точка перетину діагоналей трапеції, точка перетину її бічних сторін і середини основ належать одній прямій.

9.6. Дано чотирикутник $ABCD$, середини сторін AB і CD і точка перетину діагоналей якого належать одній прямій. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

9.7. Середини сторін AB і CD, BC і DE п'ятикутника $ABCDE$ сполучено відрізками. Середини H і K одержаних відрізків знову сполучено. Доведіть, що $HK \parallel AE$ і $HK = \frac{1}{4} AE$.

9.8. У чотирикутнику $ABCD$ точки M і N — середини діагоналей AC і BD. На прямих AD і BC взято точки P і Q так, що $PM \parallel BD$ і $QN \parallel AC$. Довести, що $PQ \parallel AB$.

9.9. На стороні AD і на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ обрано відповідно точки M і N так, що

$$AM = \frac{1}{5} AD \text{ и } AN = \frac{1}{6} AC.$$

Довести, що точки M, N і B належать одній прямій.

9.10. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$. В якому відношенні медіна CE ділить цю бісектрису?

9.11. Точки D, E і F лежать на сторонах трикутника ABC так, що $\frac{BD}{DC} = 3$, $\frac{CE}{EA} = \frac{2}{3}$ і $\frac{AF}{FB} = \frac{1}{2}$. Довести, що прямі AD, BE і CF проходять через одну точку.

9.12. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC обрано точки F, M, N відповідно так, що $\frac{AF}{FB} = \frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA}$. Довести, що точки перетину медіан трикутників ABC і FMN збігаються.

9.13. Дано чотирикутник і точку M. Довести, що точки, симетричні точці M відносно середин сторін даного чотирикутника, є вершинами паралелограма.

9.14. Точки L і M — середини протилежних сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$. Довести: для того, щоб чотирикутник був трапецією, необхідно і достатньо $\vec{LM} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$.

9.15. У правильному трикутнику ABC на стороні BC обрано точку M, з якої проведено перпендикуляри MN і MK на сторони AB і AC. Окрім того, проведено відрізки KN і OM (O — центр трикутника), які перетинаються в точці P. Довести, що $NP = KP$.

9.16. У трикутнику ABC $AB = 4$, $AC = 10$, $\angle BAC = 60°$. Точка N належить стороні BC і $\frac{BN}{NC} = 3$. Знайти AN.

9.17. BD — медіана трикутника ABC. $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Знайти $\angle ABD$.

9.18. У трикутнику ABC на сторонах BC і AC відповідно обрано точки D і E так, що $BD = CD$, $AE = 2CE$. Знайти $\frac{BC}{AB}$, якщо $AD \perp BE$ і $\angle ABC = 60°$.

9.19. У паралелограмі $ABCD$ точка K — середина сторони BC, а точка M — середина сторони CD. Знайти AD, якщо $AK = 6$, $AM = 3$, $\angle KAM = 60°$.

9.20. У трикутнику ABC $\angle B = 90°$. Медіани AD і BE взаємно перпендикулярні. Знайти $\angle ACB$.

9.21. У трикутнику ABC $\angle BAC = 60°$, $AB = 6$, $AC = 4$. Знайти кут між медіанами BD і CF.

9.22. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Довести, що медіани AM_1 і CM_2 перпендикулярні.

9.23. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$. $\angle A = 65°$, $\angle D = 85°$, $AB = \sqrt{3}$, $CD = 3$. Знайти довжину відрізка, що сполучає середини сторін AD і BC.

9.24. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці O.

$$OB = OC = 1,\ OA = 8,\ OD = 7.$$

Знайти кут між прямими AB і DC.

9.25. У трапеції $ABCD$ бічна сторона AB перпендикулярна основам AD і BC. Точка E — середина сторони CD. Знайти відношення $\frac{AD}{BC}$, якщо $AE = 2AB$ і $AE \perp CD$.

9.26. Довести, що в довільному трикутнику ABC

$$\operatorname{ctg} \angle A + \operatorname{ctg} \angle B + \operatorname{ctg} \angle C = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{4S}.$$

9.27. Нехай M і N — середини сторін CD і DE правильного шестикутника $ABCDEF$, а P — точка перетину відрізків AM і BN. Знайти кут між прямими AM і BN.

Глава IV

Багатоваріантні геометричні задачі

Як правило, перший етап розв'язування геометричної задачі — це виконання креслення, що відповідає умові. Переважна більшість задач шкільного підручника зорієнтована на однозначне геометричне трактування: задача на побудову креслення за вихідними даними має один розв'язок. Природно, така практика формує певний стереотип, результатом якого є неповні розв'язки певного класу геометричних задач, зокрема таких, в яких задані параметри не дають змоги виконати креслення одноваріантно. Подібні задачі нерідко використовують на вступних іспитах і, звичайно, є традиційно складними для абітурієнтів.

Мета розділу — не тільки ознайомити учнів з задачами названого типу, а й спробувати розкрити деякі причини, що ведуть до неоднозначного трактування умови.

Зрозуміло, що запропонований матеріал принесе максимальну користь, якщо читач спробує розв'язати задачі самостійно і порівняє свої розв'язки з авторськими.

§1. Умова задачі не визначає взаємного розміщення точок і фігури

Приклади

1) Точка або належить відрізку AB, або йому не належить, але лежить на прямій AB.

2) Точки лежать або в одній півплощині відносно заданої прямої, або в різних. Те саме з півпростором.

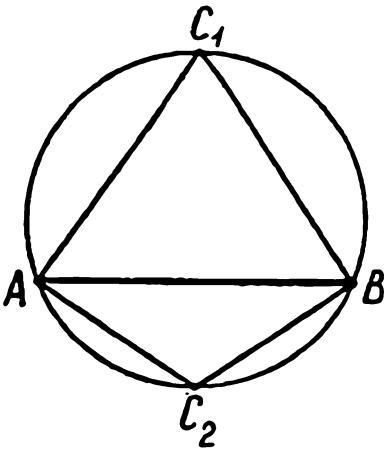
3) Різні положення центра описаного кола або ортоцентра трикутника залежно від вида трикутника (гострокутний, прямокутний, тупокутний).

Задача 1.

Довжина кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює 20π. Знайдіть площу цього трикутника, якщо його основа дорівнює 12.

Розв'язання.

Очевидно радіус кола дорівнює 10. Неважко здогадатися, що в дане коло можна вписати два рівнобедрених трикутника із заданою основою (мал. 85). У першому трикутнику $\angle C_1$ — гострий, у другому $\angle C_2$ — тупий (випадок, коли $\angle C_1 = \angle C_2 = 90°$ числові дані задачі виключають).



Мал. 85

I випадок.

Маємо $AB = 2R \sin \angle C_1$, де R — радіус кола. Звідси $\sin \angle C_1 = \frac{3}{5}$. Оскільки $\angle C_1$ — гострий, то $\cos \angle C_1 = \frac{4}{5}$. За теоремою косинусів

$$AB^2 = 2AC_1^2 - 2AC_1^2 \cdot \cos \angle C_1.$$

Далі одержимо $AC_1^2 = 360$. Площа ΔAC_1B дорівнює

$$S = \frac{1}{2} AC_1^2 \sin \angle C_1 = 108.$$

II випадок.

Тут також $\sin \angle C_2 = \frac{3}{5}$, але $\cos \angle C_2 = -\frac{4}{5}$, оскільки $\angle C_2$ — тупий. Тепер, додержуючись викладеної вище схеми розв'язку, легко встановити, що площа ΔAC_2B дорівнює 12.

Відповідь: 108 або 12.

Задача 2.

$ABCDE$ — правильний п'ятикутник. Точка M має таку властивість, що ΔDEM — рівнобічний. Знайти величину кута AMC.

Розв'язання.

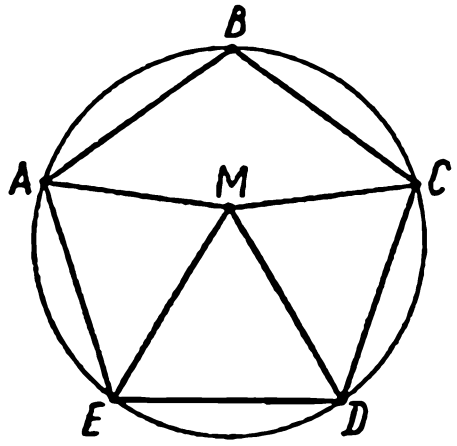
Оскільки внутрішній кут правильного п'ятикутника дорівнює 108°, то

$\angle MDC = \angle EDC - \angle EDM = 108° - 60° = 48°$ (мал. 86).

Оскільки ΔMDC — рівнобедрений ($MD = DC$), то

$$\angle DMC = \frac{1}{2}(180° - 48°) = 66°.$$

Аналогічно з'ясовуємо, що $\angle EMA = 66°$. Звідси $\angle AMC = 360° - (60° + 66° + 66°) = 168°$.



Мал. 86

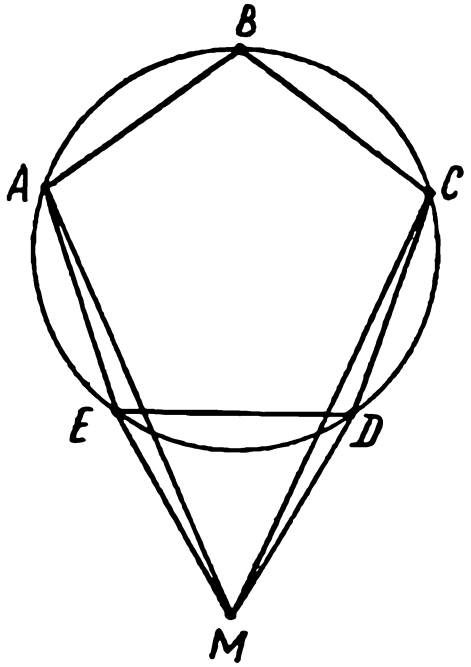
Проте наведене розв'язання не є повним. Справді, в умові задачі не сказано, що точка M лежить усередині п'ятикутника. Тому можливий другий випадок (мал. 87):

$$\angle MDC = \angle MDE + \angle EDC = 60° + 108° = 168°.$$

Оскільки ΔMDC — рівнобедрений ($MD = DC$), то $\angle CMD = 6°$. Аналогічно одержуємо $\angle AME = 6°$. Отже,

$$\angle AMC = \angle EMD - 2\angle CMD = 60° - 12° = 48°.$$

Відповідь: 168° або 48°.



Мал. 87

Задача 3.

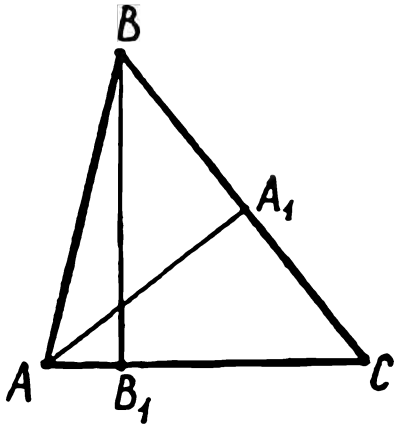
Знайти довжини сторін AB і AC трикутника ABC, якщо $BC = 8$, а довжини висот, проведених до AC і BC, дорівнюють відповідно 6,4 і 4.

Розв'язання.

Позначимо основу висоти, проведеної до сторони AC, через B_1, а до сторони BC — A_1. Виразивши площу ΔABC двома способами, одержимо $AA_1 \cdot BC = BB_1 \cdot AC$. Звідси $4 \cdot 8 = 6{,}4 \cdot AC$, $AC = 5$.

Звернемо увагу читача, що на даному етапі розв'язування задачі ми спеціально не робили посилань на малюнок. Це можна зрозуміти. Адже будь-яке посилання на готове крес-

лення зафіксувало б положення точок A_1 і B_1 відносно відрізків BC і AC відповідно. Але це положення залежить від вида трикутника ABC. Проте в умові задачі не говориться, гострокутний він чи тупокутний. (Випадок прямокутного трикутника очевидно не реалізується.)

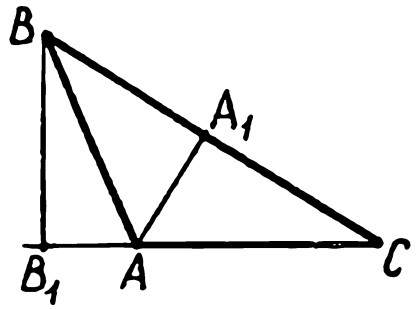


Мал. 88

Отже, для повного розв'язку задачі треба розглянути чотири випадки: ΔABC — гострокутний, $\angle A$ — тупий, $\angle B$ — тупий, $\angle C$ — тупий. Водночас уважний аналіз показує, що цей перебір можна скоротити. Справді, оскільки

$$AC = 5 < BC = 8,$$

то кут B не може бути тупим.



Мал. 89

I випадок.

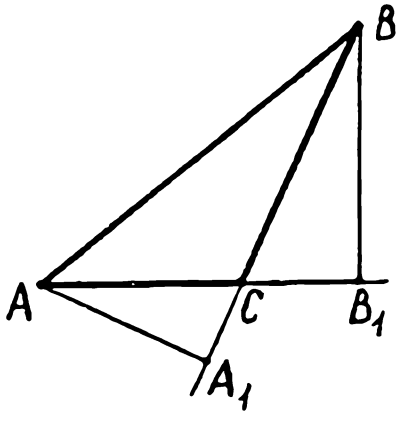
Трикутник гострокутний (мал. 88). З ΔAA_1C

$$A_1C = \sqrt{AC^2 - AA_1^2} = 3.$$

Тоді $A_1B = BC - A_1C = 5$. З ΔAA_1B $AB = \sqrt{AA_1^2 + A_1B^2} = \sqrt{41}$.

II випадок.

$\angle A$ — тупий (мал. 89). З ΔBB_1C $B_1C = \sqrt{BC^2 - BB_1^2} = 4{,}8$, тобто $B_1C < AC$, що не відповідає малюнку. Отже, цей випадок не реалізується.



Мал. 90

Читач може запитати: навіщо розглядати ту ситуацію, яка не існує? Але, як кажуть, легко бути хоробрим потім.

III випадок.

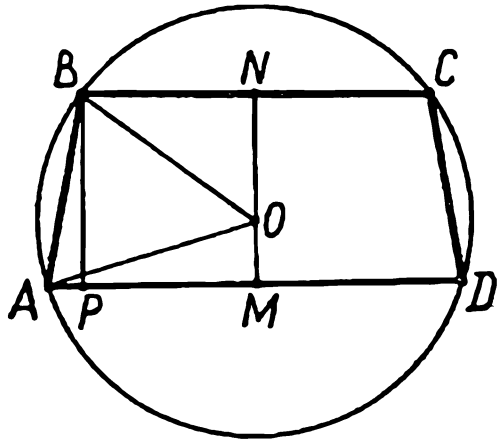
$\angle C$ — тупий (мал. 90). Зауважимо, що відрізок CB_1 все ще дорівнює 4,8. Але в запропонованій ситуації це не спричиняє суперечність. З ΔAB_1B

$$AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{137}.$$

Відповідь: $\sqrt{41}$ і 5 або $\sqrt{137}$ і 5.

Задача 4.

У круг радіуса R вписано трапеції так, що відстань від центра круга до однієї з її основ удвічі менша відповідної відстані до другої основи. Знайти периметр трапеції, якщо відомо, що один з її кутів дорівнює 60°.



Мал. 91

Розв'язання.

Оскільки в умові задачі не сказано, де лежить центр круга (всередині чи поза трапецією), то необхідно розглянути два випадки. (Випадок, коли центр круга належить одній з основ трапеції, умова задачі виключає).

На мал. 91 O — центр круга, $MN \perp AD$, $ON = 2OM$, O належить відрізку MN. Проведемо $BP \perp AD$. Враховуючи умову, $\angle ABP = 30°$. Нехай $OM = x$, тоді $NO = 2x$, $BP = 3x$.

З ΔOBN $BN = \sqrt{R^2 - 4x^2}$, з ΔAOM $AM = \sqrt{R^2 - x^2}$, з ΔABP $AP = \frac{3x}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$. Маємо:

$$PM = AM - AP = \sqrt{R^2 - x^2} - x\sqrt{3}.$$

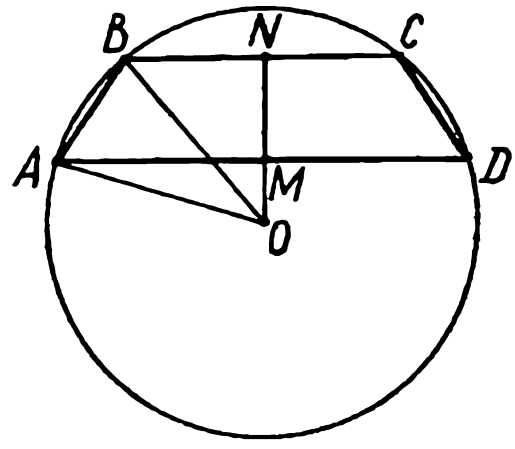
Тоді

$$\sqrt{R^2 - 4x^2} = \sqrt{R^2 - x^2} - x\sqrt{3}.$$

Звідси після нескладних перетворень одержимо $x = \frac{R}{2}$. Отже, $ON = 2x = R$ — суперечність.

Аналогічно можна показати, що випадок, коли $OM = 2ON$, не реалізується.

Розглянемо другий випадок (мал. 92).



Мал. 92

Міркуючи, як і в першому випадку, для x одержуємо рівняння $\sqrt{R^2-4x^2}=\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x}{\sqrt{3}}$. Звідси $x=\frac{R\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. Тоді шуканий периметр дорівнює $\frac{11R\sqrt{7}}{7}$. (Пропонуємо читачу переконатися в цьому самостійно.)

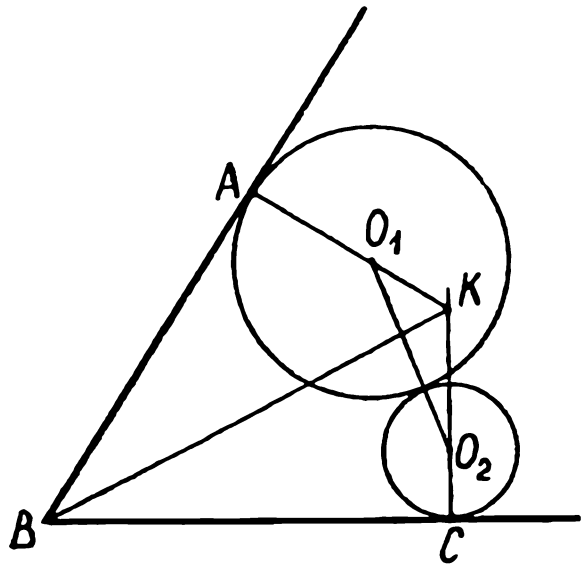
Відповідь: $\frac{11R\sqrt{7}}{7}$.

Задача 5.

Кут ABC дорівнює 60°, причому $AB = BC = a$. Коло O_1 дотикається AB в точці A, а коло O_2 дотикається BC в точці C, окрім того, ці кола дотикаються одне до одного зовні. Знайти радіуси кіл, якщо відомо, що їх відношення дорівнює двом.

Розв'язання.

Якщо відомо, що коло дотикається прямої в даній точці, то звідси ще не випливає однозначність положення її центра в одній з півплощин, які визначаються прямою. Цей факт нерідко є джерелом невизначеності геометричної задачі. Саме тут ми зіткнулися з подібною ситуацією. Справді, кожний з центрів O_1 або O_2 може знаходитися як усередині кута, так і поза ним.



Мал. 93

І випадок.

Зрозуміло, що $O_1A \perp AB$ і $O_2C \perp BC$. K — точка перетину прямих O_1A і O_2C (мал. 93). Легко встановити, що $\angle AKC = 120°$. Оскільки $AB = BC$, то $\Delta ABK = \Delta CBK$ за гіпотенузою і катетом. Звідси $\angle ABK = \angle CBK = 30°$. Тоді $AK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Нехай $O_2C = r$. За умовою $O_1A = 2r$. Далі

$$O_1K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r,\ O_2K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - r.$$

Застосуємо до ΔO_1KO_2 теорему косинусів. Маємо

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 -$$

$$- 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)\cos 120°.$$

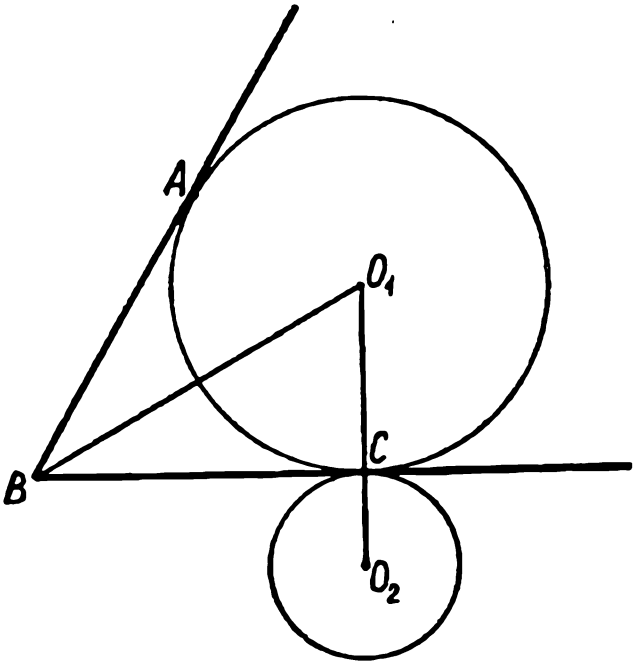
Звідси після необхідних перетворень одержимо

$$r = \frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{4}a.$$

II випадок.

Зрозуміло, що $\angle O_1BC = 30°$.

Тоді $O_1C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, а $O_2C = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (мал. 94).



Мал. 94

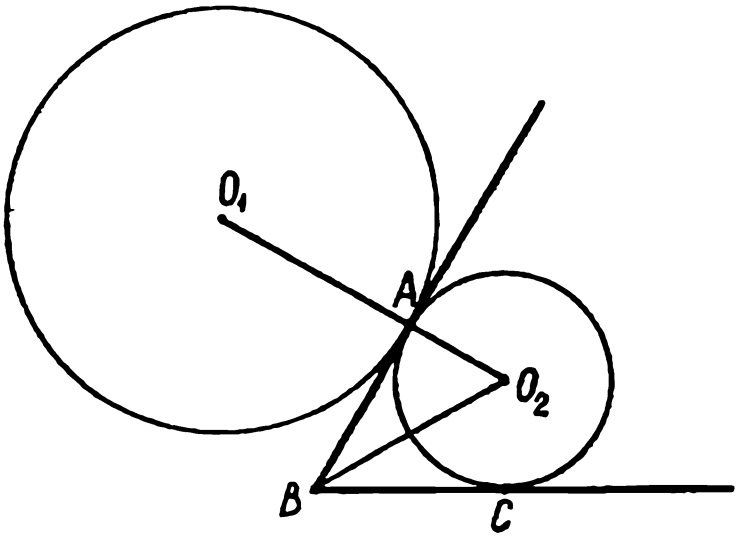
III випадок.

Маємо $O_2A = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $O_1A = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ (мал. 95).

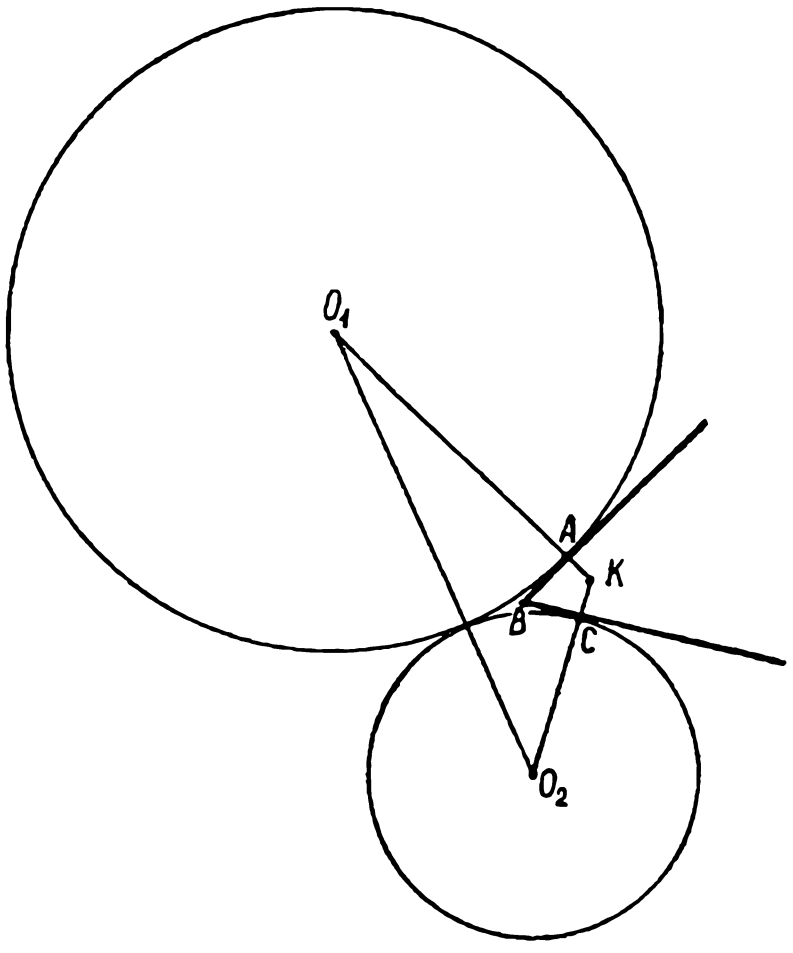
IV випадок.

Як і в першому випадку, визначаємо, що $\angle O_1KO_2 = 120°$, $\angle ABK = \angle CBK = 30°$ (мал. 96). Далі

$$O_1K = 2r + \frac{a\sqrt{3}}{3},\ O_2K = r + \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Мал. 95



Мал. 96

Знову застосовуємо теорему косинусів до ΔO_1KO_2:

$$9r^2=\left(2r+\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(r+\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)-$$

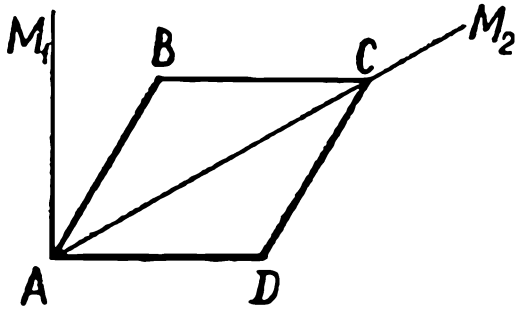
$$-2\left(2r+\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\left(r+\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\cos 120°.$$

Звідси $r=\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{4}a.$

Відповідь: $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{4}a$ і $\frac{\sqrt{35}-3\sqrt{3}}{2}a$, або $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ і $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, або $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ і $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$, або $\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{4}a$ і $\frac{\sqrt{35}+3\sqrt{3}}{2}a$.

Задача 6.

Два ромба $ABCD$ і $AMHK$, які мають спільну вершину A, розташовані так, що сторони AB і AM утворюють кут в 30°. Відомо, що кути при вершині A обох ромбів дорівнюють 60°, площа перетину ромбів дорівнює $5\sqrt{3}$, а площа їх об'єднання дорівнює $23\sqrt{3}$. Знайти площу кожного з ромбів.



Мал. 97

Розв'язання.

Мабуть, прочитавши умову цієї задачі, відразу складно уявити відповідну «картинку». Проте цей «недолік» має свої переваги. Можливо, спроби виконати креслення підкажуть читачеві, що одноваріантно це зробити не можна.

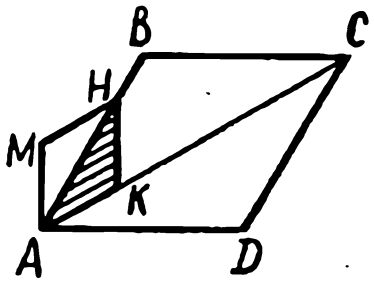
Намалюємо ромб $ABCD$ з кутом A, що дорівнює 60° (мал. 97). Оскільки за умовою сторони AM і AB утворюють кут в 30°, то сторона AM може лежати або на промені AM_1, або на промені AM_2. Однак, намалювавши ромб $AMHK$ в кожному з двох випадків, побачимо, що фігури (перетин ромбів) будуть симетричними відносно AC, отже, рівними. Тому належність точки M до променя AM_1 або променя AM_2 не буде джерелом багатоваріантності в даній задачі.

Але уважніший підхід покаже, що форма перетину ромбів залежить від положення вершини H на промені AB.

І випадок.

$AH \leqslant AB$ (мал. 98). Нехай сторони ромбів $ABCD$ і $AMHK$ відповідно дорівнюють a і b. Оскільки гострі кути цих ромбів містять по 60°, то

$$S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}, \text{ а } S_{AMHK} = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}.$$

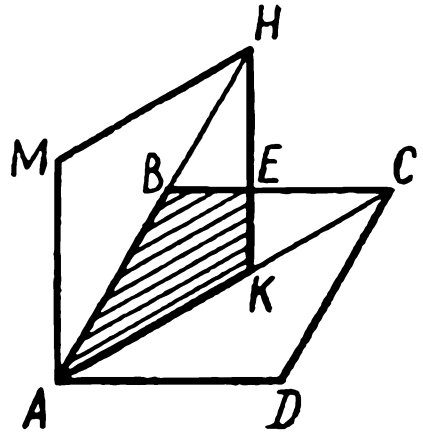


Мал. 98

У розглядуваному випадку перетин ромбів — це трикутник AHK, а об'єднання складається з ромба $ABCD$ і трикутника AMH. Враховуючи умову, складаємо таку систему:

$$\begin{cases} \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = 23\sqrt{3}, \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Звідси одержуємо $a = 6$, $b = 2\sqrt{5}$. Проте не треба поспішати з висновками, слід перевірити, чи відповідає знайдений результат розглядуваній геометричній конфігурації. З ΔAKH за допомогою теореми косинусів доводимо, що $AH = 2\sqrt{15}$. Отже, $AH > AB$, що суперечить розглядуваному випадку.



Мал. 99

ІІ випадок.

$AB < AH < 3AB$ (мал. 99).

Тут перетин ромбів — чотирикутник $ABEK$; об'єднання складається з ромба $ABCD$ і двох трикутників AMH і BHE. З ΔAMH за теоремою косинусів доводимо, що $AH = b\sqrt{3}$. Тоді $BH = b\sqrt{3} - a$. Легко показати, що

$$\angle BEH = 90°, \ \angle EBH = 60°.$$

Звідси $S_{BHE} = \dfrac{(\sqrt{3}b - a)^2\sqrt{3}}{8}$. Залишилося визначити, що

$$S_{AHK} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}, \text{ а } S_{ABEK} = S_{AHK} - S_{BEH}.$$

Тепер можна скласти систему

$$\begin{cases} \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{(\sqrt{3}b - a)^2\sqrt{3}}{8} = 23\sqrt{3}, \\ \frac{b^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(\sqrt{3}b - a)^2\sqrt{3}}{8} = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Після відповідних перетворень легко одержати

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 4\sqrt{2}, \\ b = 2\sqrt{6}, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a = 2\sqrt{6}, \\ b = 4\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Якщо $b = 2\sqrt{6}$, то $AH = 6\sqrt{2} > a = 4\sqrt{2}$, що відповідає випадку, який розглядаємо. Якщо $b = 4\sqrt{2}$, то

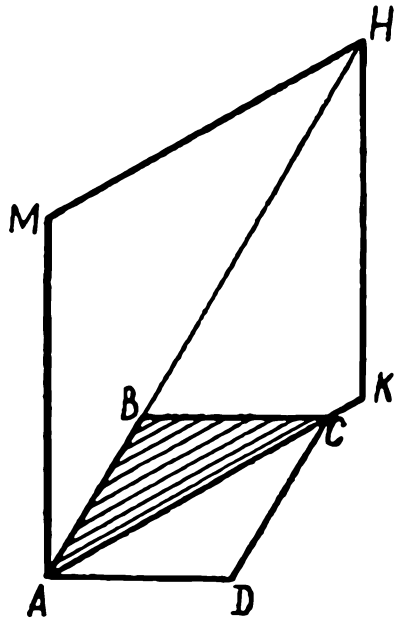
$$AH = 4\sqrt{6} > a = 2\sqrt{6}.$$

І цей результат підходить. Отже, площі ромбів набувають одного з двох значень $16\sqrt{3}$ або $12\sqrt{3}$.

III випадок.

$AH > 3AB$ (мал. 100). Тепер перетин ромбів — це трикутник ABC, а об'єднання складається з ромба $AMHK$ і трикутника ACD. Маємо

$$\begin{cases} \frac{b^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 23\sqrt{3}, \\ \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$



Мал. 100

Звідси $\begin{cases} b = 6, \\ a = 2\sqrt{5}. \end{cases}$

Проте $AH = b\sqrt{3} = 6\sqrt{3} < 3a = 6\sqrt{5}$, що не задовольняє розглядуваний випадок.

Відповідь: $S_{ABCD} = 16\sqrt{3}$ і $S_{AMHK} = 12\sqrt{3}$ або

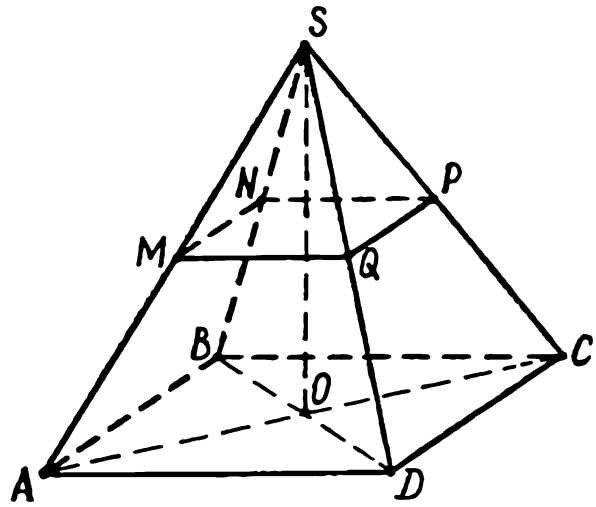
$S_{ABCD} = 12\sqrt{3}$ і $S_{AMHK} = 16\sqrt{3}$.

Задача 7.

Основою піраміди $SABCD$ є прямокутник $ABCD$, діагональ BD якого утворює зі стороною BC кут α. Усі бічні ребра піраміди мають довжину l, а величина кута ASC дорівнює 2β. Піраміда перетнута площиною, рівновіддаленою від усіх її вершин. Визначити площу перетину піраміди цією площиною.

Розв'язання.

Зауважимо: якщо площина перетинає відрізок в його середині, то кінці відрізка рівновіддалені від цієї площини (доведіть самостійно). Отже, січна площина, про яку говориться в умові, повинна перетинати ребра піраміди в їх серединах. Можливі три принципово різні положення січної площини.



Мал. 101

I випадок.

M, N, P, Q — середини відповідно ребер AS, BS, CS, DS (мал. 101).

Оскільки бічні ребра піраміди рівні, то її вершина проектується в центр описаного кола основи, в даному випадку — в точку перетину діагоналей прямокутника.

З ΔOSC $OC = l\sin\beta$. $AC = 2OC = 2l\sin\beta$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2\sin(180^\circ - 2\alpha) = 2l^2\sin^2\beta\sin 2\alpha.$$

Чотирикутник $MNPQ$ гомотетичний прямокутнику $ABCD$ з коефіцієнтом гомотетії $\frac{1}{2}$ і центром S. Отже,

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{2}l^2\sin^2\beta\sin 2\alpha.$$

II випадок.

M, N, P, Q — середини відповідно ребер AB, SB, SC, DC (мал. 102). Очевидно $MNPQ$ — трапеція, причому

O належить MQ, $MQ = BC$, $NP = \frac{1}{2}MQ$. Нескладно довести, що

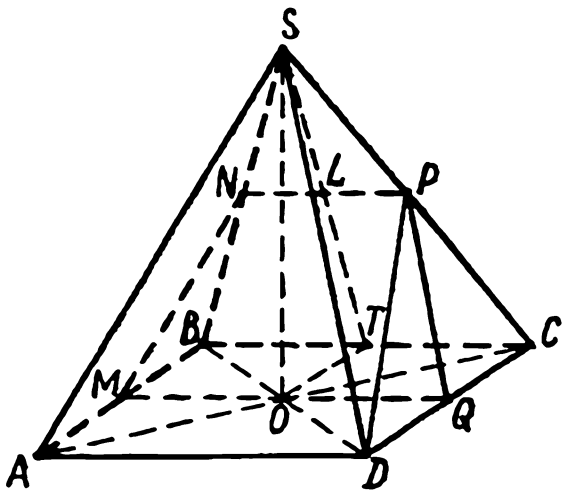
$$MQ = 2l \sin\beta \cos\alpha.$$

Проведемо $OT \perp BC$. L — точка перетину прямих ST і NP. Оскільки

$MQ \perp$ пл. SOT,

то $OL \perp MQ$.

Очевидно $SL = LT$, тоді



Мал. 102

$$OL = \frac{1}{2}ST = \frac{1}{2}\sqrt{SC^2 - TC^2} = \frac{l}{2}\sqrt{1 - \sin^2\beta\cos^2\alpha}.$$

$$S_{MNPQ} = \frac{MQ+NP}{2} \cdot OL = \frac{3}{4}l^2 \sin\beta\cos\alpha\sqrt{1 - \sin^2\beta\cos^2\alpha}.$$

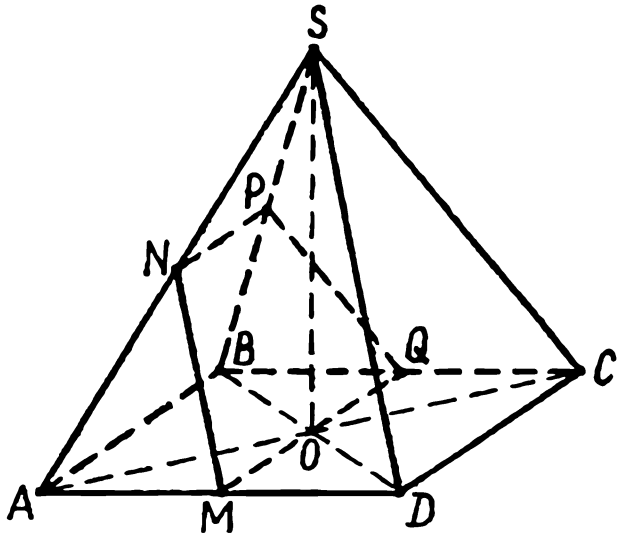
III випадок.

M, N, P, Q — відповідно середини ребер AD, AS, BS, BC (мал. 103).

За аналогією з другим випадком можна довести, що

$$S_{MNPQ} = \frac{3}{4}l^2 \sin\beta \sin\alpha \times$$

$$\times \sqrt{1 - \sin^2\beta \sin^2\alpha}.$$



Мал. 103

Пропонуємо читачам переконатися в цьому самостійно.

§2. В умові задачі фігурують два кола, що дотикаються, але не вказано спосіб дотику: зовнішній чи внутрішній. У задачі дано дві точки, які ділять коло на дві дуги, окрім того, відомо, що деяка пряма дотикається кола, але не вказано, на якій з двох дуг лежить точка дотику

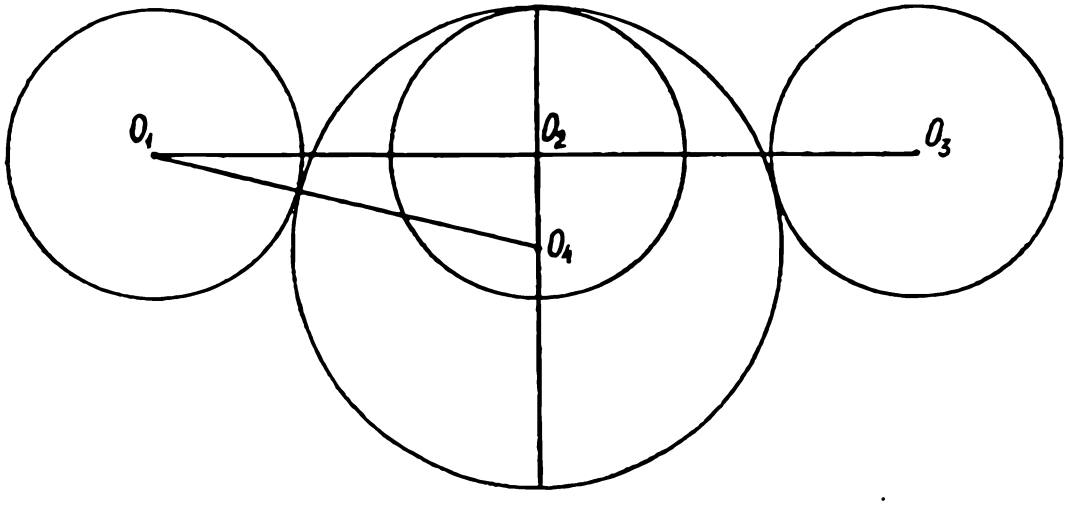
Задача 8.

Дано відрізок довжиною 20. Три кола радіуса 4 мають центри на кінцях відрізка або в його середині. Знайдіть радіус четвертого кола, яке дотикається трьох даних.

Розв'язання.

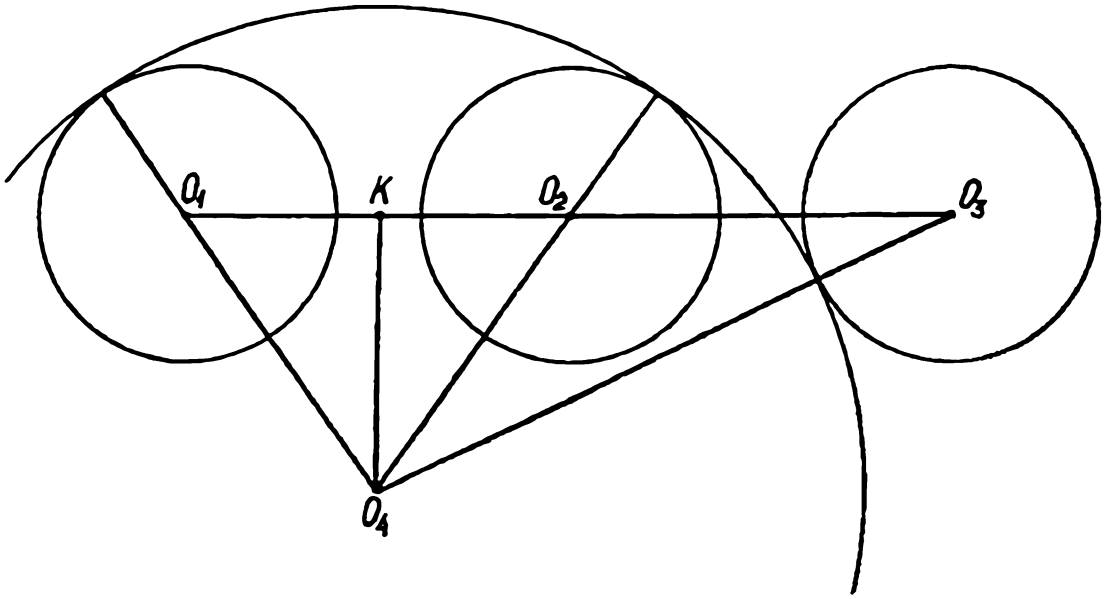
O_1, O_2, O_3 — центри кіл радіуса 4 (мал. 104). Причому $O_1O_3 = 20$, O_2 — середина відрізка O_1O_3. O_4 — центр кола, яке дотикається трьох даних. Нехай шуканий радіус дорівнює x. Тоді $O_1O_4 = x + 4$, $O_4O_2 = x - 4$. Для прямокутного трикутника $O_1O_4O_2$ (доведіть самостійно, що $O_4O_2 \perp O_1O_3$) $(x + 4)^2 = (x - 4)^2 + 10^2$.

Звідси $x = 6{,}25$.



Мал. 104

Знову-таки може створитися враження, що одержано кінцеву відповідь. Насправді це не так, тому що є ще одне зовсім інше положення четвертого кола — мал. 105. Маємо:



Мал. 105

$$O_4O_1 = O_4O_2 = x-4,\ O_4O_3 = x + 4.$$

Проведемо $O_4K \perp O_1O_2$. Очевидно $O_1K = KO_2 = 5$.

З ΔO_4KO_2 $O_4K^2 = (x - 4)^2 - 5^2$. З ΔO_4KO_3

$$O_4K^2 = (x+4)^2 - 15^2.$$

Одержуємо $(x - 4)^2 - 5^2 = (x + 4)^2 - 15^2$. Звідси $x = 12{,}5$.

Зауважимо, що є ще чотири випадки положення центра четвертого кола (центрами можуть бути точки, симетричні точці O_4 відносно прямої O_1O_3 або відносно точки O_2). Очевидно, що ці випадки даватимуть раніше одержані результати.

Відповідь: 6,25 або 12,5.

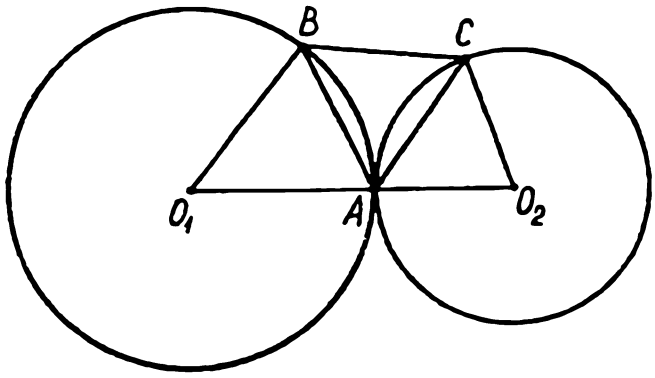
Задача 9.

Два кола радіусів R і r $(R > r)$ дотикаються в точці A. Визначити сторону рівнобічного трикутника, одна з вершин якого в точці A, а дві інші лежать на різних колах.

Розв'язання.

Неважко здогадатися, що для повного розв'язку потрібно розглянути два випадки: дані кола дотикаються зовні (мал. 106) і внутрішньо (мал. 107).

Нехай шукана сторона правильного трикутника дорівнює a. Розглянемо перший випадок (мал. 106).



Мал. 106

Нехай

$$\angle O_1AB = \alpha,$$

$$0° < \alpha < 90°.$$

Тоді $\angle O_2AC = 120° - \alpha$.

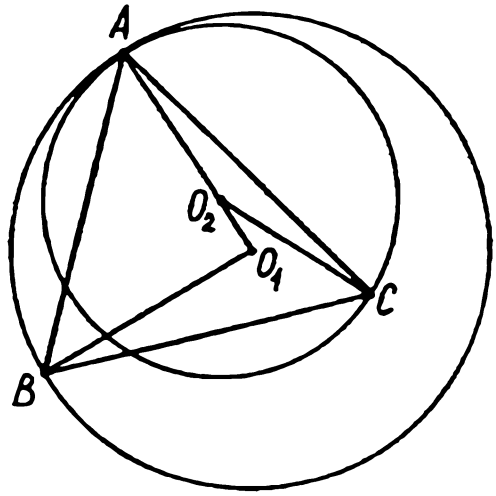
З рівнобедреного трикутника O_1AB за теоремою синусів знаходимо, що $a = 2R\cos\alpha$, аналогчіно з ΔO_2AC $a = 2r\cos(120° - \alpha)$. Маємо

$$a = 2r\cos(120° - \alpha) = -r\cos\alpha + r\sqrt{3}\sin\alpha = -r\cos\alpha +$$

$$+ \sqrt{3}\,r\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\frac{ra}{2R} + \sqrt{3}\,r\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}.$$

Звідси $a(2R + r) = r\sqrt{3}\cdot\sqrt{4R^2 - a^2}$, $a^2(4R^2 + 4Rr + 4r^2) = 12\,r^2R^2$, $a = \dfrac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 + Rr + r^2}}$.

У другому випадку (мал. 107) легко показати (пропонуємо читачам це зробити самостійно): якщо ΔABC рівнобічний і точка O_1 лежить усередині круга з центром O_2, то точки C і B лежать у різних півплощинах відносно прямої AO_1.



Мал. 107

Нехай $\angle BAO_1 = \alpha$. Тоді

$$\angle O_1AC = 60° - \alpha.$$

Так само з рівнобедрених трикутників O_1AB і O_2AC одержуємо відповідно

$$a = 2R\cos\alpha,\ a = 2R\cos(60° - \alpha).$$

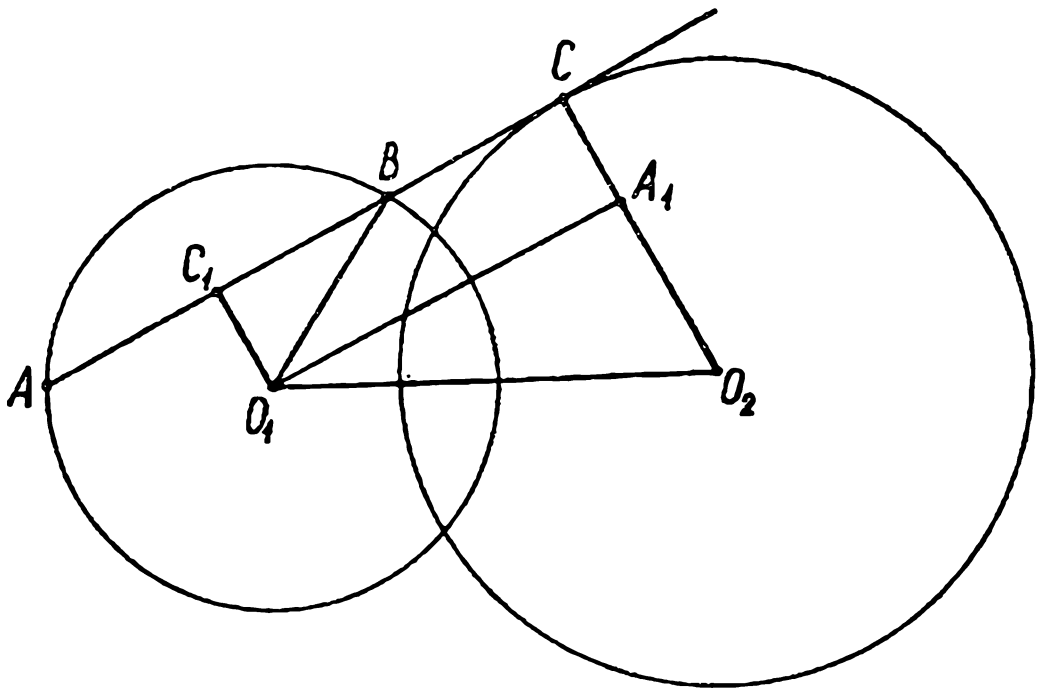
Звідси неважко встановити, що $a = \dfrac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 - Rr + r^2}}$.

Зауважимо: якщо O_1 лежить поза кругом (або на колі) з центром O_2, то точки B і C лежать в одній півплощині відносно AO_1 (або точка C лежить на AO_1), і відповідь у цьому випадку не зміниться.

Відповідь: $\dfrac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 + Rr + r^2}}$ або $\dfrac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 - Rr + r^2}}$.

Задача 10.

Відстань між центрами двох кіл дорівнює $10r$. Одне з кіл має радіус $5r$, друге $6r$. Деяка пряма перетинає менше коло в точках A і B і дотикається більшого в точці C. Знайти довжину хорди AB, якщо $AB = 2BC$.



Мал. 108

Розв'язання.

Враховуючи величини радіусів кіл і відстань між їх центрами, визначаємо, що дані кола мають дві спільні точки (мал. 108). $O_2C \perp AB$. Проведемо $O_1C_1 \parallel O_2C$, $O_1A_1 \parallel C_1C$. Оче-

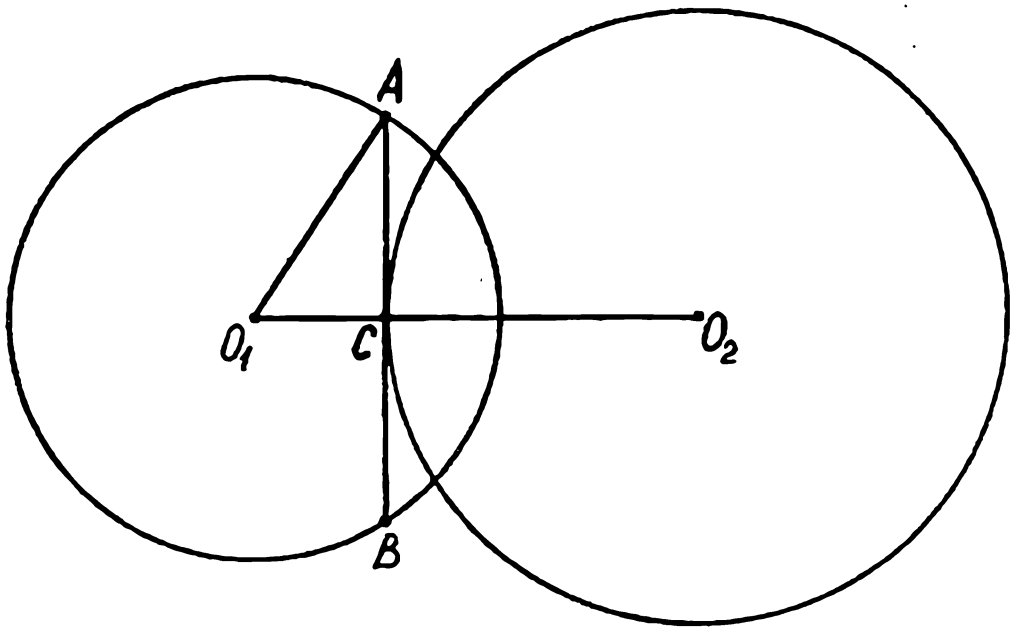
видно $O_1C_1CA_1$ — прямокутник і $AC_1 = C_1B$. Нехай $AC_1 = C_1B = x$. Тоді з урахуванням умови $BC = x$.

Звідси $O_1A_1 = 2x$. Нехай $O_1C_1 = y$. Маємо

$$O_2A_1 = O_2C - A_1C = 6r - y.$$

З ΔO_1C_1B $25r^2 = x^2 + y^2$.

З $\Delta O_1A_1O_2$ $100r^2 = 4x^2 + (6r - y)^2$. Після нескладних перетворень встановлюємо, що $2x = 2r\sqrt{21}$, тобто $AB = 2r\sqrt{21}$.



Мал. 109

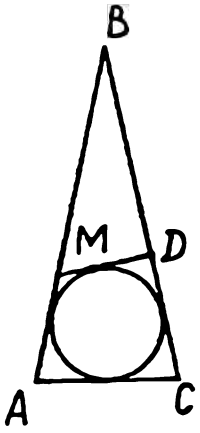
Було б добре, аби читач помітив, що наведений розв'язок не є повним. Справді, проведемо дотичну до більшого кола перпендикулярно O_1O_2 (мал. 109). Тут точка C належить прямій O_1O_2, і умова $AB = 2BC$ очевидно виконується. З ΔO_1AC $AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2 = 25r^2 - 16r^2 = 9r^2$. Отже, $AB = 2BC = 6r$.

Відповідь: $2r\sqrt{21}$ або $6r$.

Задача 11.

Дано рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$). У точці M до кола, вписаного в трикутник, проведено дотичну, перпендикулярну до сторони BC. D — точка перетину дотичної зі стороною BC. Визначити площу трикутника ABC, якщо

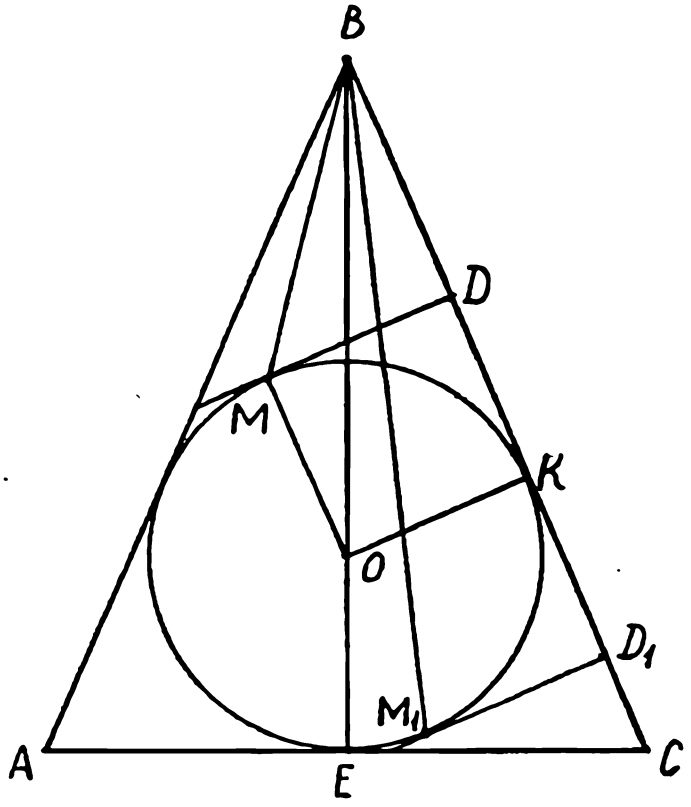
радіус вписаного кола дорівнює r, а площа трикутника MBD дорівнює S.



Мал. 110

Розв'язання.

Відомо, що працювати з великим кресленням зручніше, ніж з маленьким. На нашу думку, цей тривіальний факт у даній задачі відіграє вирішальну роль.



Мал. 111

На мал. 110 побудовано рівнобедрений трикутник ABC із вписаним у нього колом. MD — дотична, про яку говориться в умові.

А якщо креслення збільшити? — мал. 111. Теперь незрівняно легше помітити, що можна провести ще одну дотичну M_1D_1, яка задовольняє умову. (Адже на мал. 110 вписане коло майже «не залишило місця» для дотичної M_1D_1.)

І випадок.

K — точка дотику вписаного кола зі стороною BC. Очевидно $OMDK$ — квадрат. Тоді $MD = r$. Оскільки $S_{MBD} = S$, то $BD = \frac{2S}{r}$. Далі, $BK = BD + DK = \frac{2S}{r} + r$. З ΔOBK:

$$BO = \sqrt{\left(\frac{2S}{r} + r\right)^2 + r^2} = \frac{1}{r}\sqrt{4S^2 + 4Sr^2 + 2r^4}.$$

$$\Delta OBK \sim \Delta CBE.$$

Звідси $\frac{OK}{BK} = \frac{EC}{BE}$, $EC = \frac{rBE}{BK}$.

$$S_{ABC} = BE \cdot EC = BE \cdot \frac{rBE}{BK} = \frac{(BO + OE)^2 r}{BK} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{r}\sqrt{4S^2 + 4Sr^2 + 2r^4} + r\right)^2 r}{\frac{2S}{r} + r} = \frac{\left(\frac{1}{r}\sqrt{4S^2 + 4Sr^2 + 2r^4} + r\right)^2 r^2}{2S + r^2}.$$

II випадок.

Покажемо схематичний розв'язок.

$M_1 O K D_1$ — квадрат, $B D_1 = \frac{2S}{r}$, $BK = \frac{2S}{r} - r$, $BO =$

$= \frac{1}{r}\sqrt{4S^2 - 4Sr^2 + 2r^4}$,

$$S_{ABC} = \frac{(BO + OE)^2 r}{BK} = \frac{\left(\frac{1}{r}\sqrt{4S^2 - 4Sr^2 + 2r^4} + r\right)^2 r^2}{2S - r^2}.$$

Відповідь: $\frac{\left(\frac{1}{r}\sqrt{4S^2 + 4Sr^2 + 2r^4} + r\right)^2 r^2}{2S + r^2}$ або

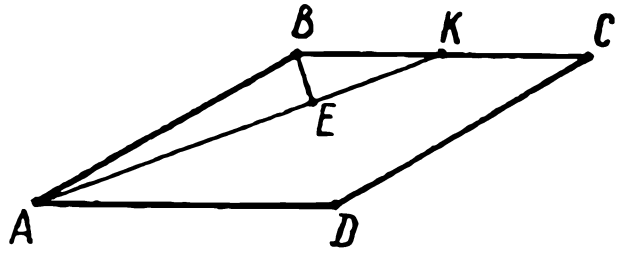
$$\frac{\left(\frac{1}{r}\sqrt{4S^2 - 4Sr^2 + 2r^4} + r\right)^2 r^2}{2S - r^2}.$$

§3. У задачі фігурують об'єкти, яким приписуються певні властивості, але не зазначено порядок відповідності між множиною об'єктів і множиною їх властивостей

Приклади

1. В умові сказано, що трикутник ABC рівнобедрений, але не сказано, які пари сторін однакові.

2. Точка M ділить відрізок AB на відрізки довжиною a і b. При цьому не уточнено, який з них дорівнює a, а який b.

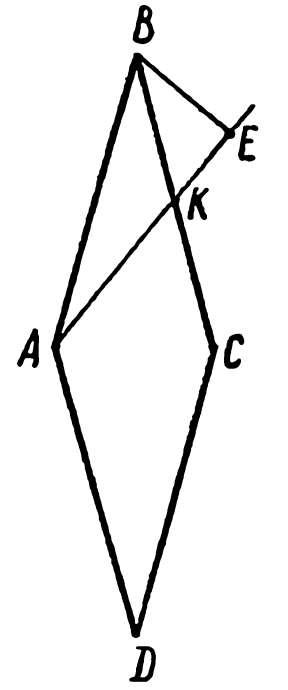


Мал. 112

3. Відомо, що кут між прямими AB і CD, які перетинаються, дорівнює α. Проте не вказано, який з кутів — AMD або AMC (M — точка перетину прямих) — гострий.

Задача 12.

Дано ромб зі стороною, що дорівнює 1, і гострим кутом при вершині, який дорівнює $\frac{\pi}{6}$. Точка K лежить на стороні BC, причому $BK = KC$. Знайти відстань від вершини B до прямої AK.



Мал. 113

Розв'язання.

Умова задачі нас «прив'язує» до вершини B. Але ми не знаємо, кут B — гострий чи тупий.

I випадок.

$\angle B = \frac{5\pi}{6}$ (мал. 112). Проведемо $BE \perp AK$. Відрізок BE — шуканий. Маємо: $S_{ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot BK \sin \angle B = \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{8}$.

З ΔABK за теоремою косинусів

$$AK = \sqrt{AB^2 + BK^2 - 2AB \cdot BK \cos \frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}.$$

$$BE = \frac{2S_{ABK}}{AK} = \frac{1}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}.$$

II випадок.

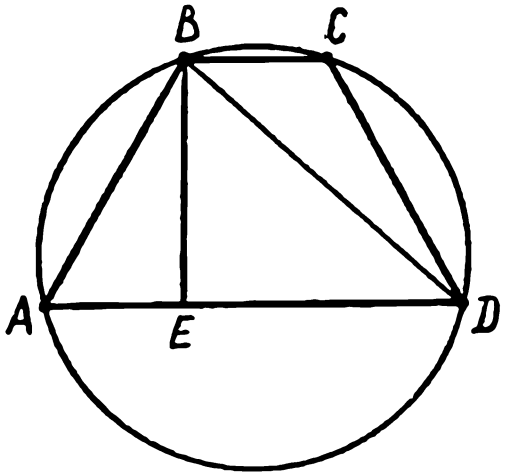
$\angle B = \frac{\pi}{6}$ (мал. 113). Маємо:

$S_{ABK} = \frac{1}{8}$, $AK = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$. $BE = \frac{2S_{ABK}}{AK} = \frac{1}{2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$.

Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$ або $\frac{1}{2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$.

Задача 13.

Довжини сусідніх сторін вписаного в коло чотирикутника відрізняються на 1. Довжина найменшої з них також дорівнює 1. Знайти радіус кола.



Мал. 114

Розв'язання.

Нехай $ABCD$ — чотирикутник, про який говориться в умові. Наприклад, BC — його найменша сторона, $BC = 1$. AB і CD сусідні з BC сторони. Тому $AB = CD = 2$. Сторона AD повинна відрізнятись від сусідньої сторони, яка дорівнює 2, на одиницю. Тому для AD можливі два значення: $AD = 3$ або $AD = 1$.

I випадок.

$AD = 3$ (мал. 114). Оскільки хорди AB і CD рівні, то $BC \parallel AD$ і $ABCD$ — рівнобедрена трапеція. Проведемо $BE \perp AD$. Легко показати, що $AE = \frac{AD - BC}{2} = 1$, $DE = 2$. З ΔABE $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{3}$. З ΔBED $BD = \sqrt{7}$. Зрозуміло, що $\angle BAD = 60°$.

Нехай радіус кола дорівнює R. Тоді $BD = 2R \sin 60°$. Звідси $R = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

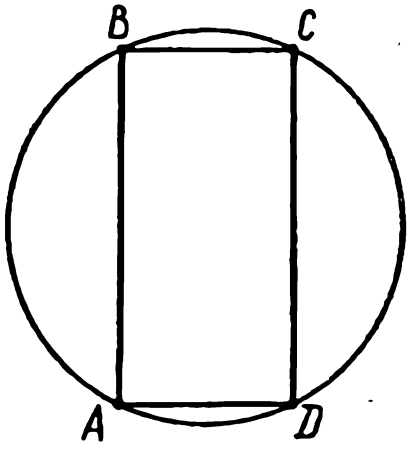
II випадок.

$AD = 1$ (мал. 115). Очевидно $ABCD$ —прямокутник. Знаючи сторони прямокутника, легко показати, що радіус описаного кола дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{21}}{3}$ або $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Задача 14.

Периметр трапеції дорівнює 112. Точка дотику вписаного в трапецію кола ділить одну з бічних сторін на відрізки, які дорівнюють 8 і 18. Обчислити основи цієї трапеції.



Мал. 115

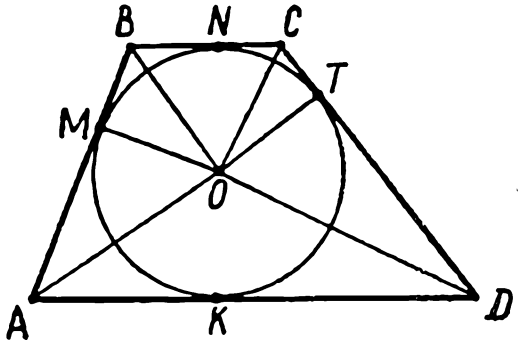
Розв'язання.

Нехай $ABCD$ — трапеція, про яку говориться в умові. M — точка дотику вписаного кола з бічною стороною AB. За умовою точка M ділить AB на відрізки, які дорівнюють 8 і 18. Є невизначеність: невідомо, який з відрізков — AM або MB — дорівнює 8, а який 18.

Виконаємо креслення — мал. 116. Маємо

$$OM \perp AB,\ \angle BAO = \angle OAD,$$

$$\angle ABO = \angle OBC.$$



Мал. 116

Кут BAD — гострий, кут ABC — тупий. Звідси $\angle MAO < \angle MBO$, отже, $AM > MB$, а значить, $AM = 18$, $MB = 8$. І, здавалося б, невизначеність умови задачі зникає. Проте спрацьовує глибоко вкорінений стереотип: зображати трапецію з двома гострими кутами при більшій основі. Отже, не можна стверджувати, що $\angle BAD$ — гострий. Він може бути і тупим — мал. 117 (випадок, коли $\angle BAD = 90°$, умова задачі виключає, оскільки $AM \neq MB$).

І випадок.

$\angle BAD$ — гострий (мал. 116). $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. Отже, $\angle AOB = 90°$. З ΔAOB $OM = \sqrt{AM \cdot MB} = 12$.

Оскільки в дану трапецію можна вписати коло, то $AB + CD = BC + AD = \frac{112}{2} = 56$. Звідси $CD = 30$.

Нехай $CT = x$, тоді $DT = 30 - x$. З ΔCOD

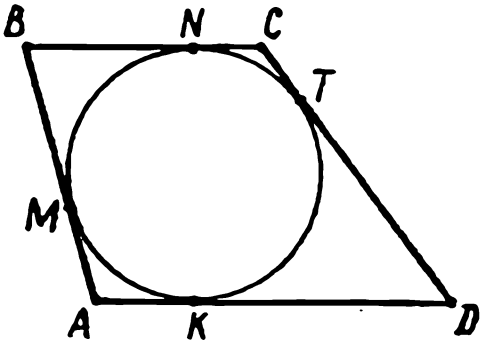
$$OT^2 = CT \cdot TD,\ 144 = x\,(30 - x).$$

Звідси $x = 6$ або $x = 24$. Оскільки кут ADC гострий, то $CT < TD$. Отже, $CT = 6$, $TD = 24$. $CN = CT = 6$, $DK = DT = 24$ (N і K — точки дотику кола з основами трапеції). $BN = BM = 8$, $AK = AM = 18$. Звідси

$$BC = 14,\ AD = 42.$$

II випадок.

$\angle BAD$ — тупий (мал. 117). Оскільки в попередньому випадку для знаходження довжин відрізків CT і TD ми не використовували порядок відповідності чисел 8 і 18 довжинам відрізків AM і MB, то зразу можемо стверджувати, що $CT = 6$, $TD = 24$. Звідси легко одержати $BC = 24$, $AD = 32$.



Мал. 117

Проте й тепер розв'язок задачі не можна вважати повним. Справді, кути при більшій основі трапеції не обов'язково гострі, але (!) один з них обов'язково гострий. А якщо відрізки з довжинами 8 і 18 лежать якраз на бічній стороні, яка в двох розглянутих випадках утворила гострий кут з основою? (На наших малюнках це сторона CD.) Доведеться розглянути і цей випадок.

Будемо користуватись цими ж малюнками. Отже, $CT = 8$, $TD = 18$, $MB = x$. Маємо знайоме рівняння $144 = x(30 - x)$. Його корені $x = 6$ або $x = 18$. Для мал. 116 $MB = 6$, а для мал. 117 $MB = 18$. Далі — зрозуміло.

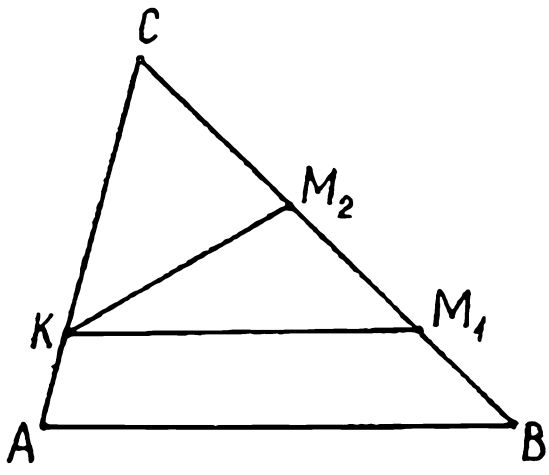
Відповідь: 14 і 42 або 24 і 32.

Зробимо одне зауваження. Інколи «алгебра» геометричної задачі може навести на думку про багатоваріантність. Так, в тільки-но розглянутій задачі наявність двох коренів $x = 6$ і $x = 18$, мабуть, могла б стати своєрідною підказкою. Адже якщо учень навіть «прогавив» другий випадок, то необхідність перевірки реалізації одержаного проміжного результата, можливо, відіграла б свою роль.

Задача 15.

У трикутнику ABC $\angle A = 75°$, $\angle B = 45°$. На стороні CA беруть точку K так, що $\frac{CK}{KA} = 3$. На стороні CB беруть точку

M так, що пряма KM відсікає від трикутника ABC трикутник, йому подібний. Визначити $\frac{KM}{AB}$.



Мал. 118

Розв'язання.

З високою вірогідністю перша ідея, яка може виникнути, — це обрати точку M так, щоб $KM \parallel AB$. У цьому випадку $\angle CKM = 75°$. Проте якщо провести KM так, що $\angle CKM = 45°$, то ми також матимемо трикутник, подібний даному.

На мал. 118 цим двом випадкам відповідають точки M_1 і M_2.

Для подібних трикутників ABC і KCM_1 запишемо $\frac{KM_1}{AB} = \frac{CK}{AC} = \frac{3}{4}$.

Для подібних трикутників ABC і M_2CK маємо $\frac{KM_2}{AB} = \frac{CK}{CB}$. Нехай $AK = x$. За теоремою синусів

$$\frac{CA}{\sin 45°} = \frac{CB}{\sin 75°}. \text{ Звідси } CB = \frac{4x \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2x(1+\sqrt{3}).$$

Отже, $\frac{KM_2}{AB} = \frac{CK}{CB} = \frac{3x}{2(1+\sqrt{3})x} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}$.

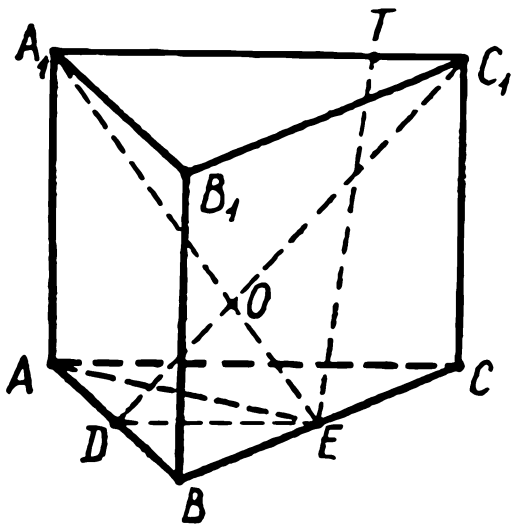
Відповідь: $\frac{3}{4}$ або $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Задача 16.

У правильній трикутній призмі дві вершини верхньої основи сполучено з серединами протилежних сторін нижньої основи. Кут між одержаними прямими дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Знайти об'єм призми, якщо довжина сторони основи дорівнює a.

Розв'язання.

На мал. 119 зображено правильну трикутну призму. D — середина ребра AB, E — середина ребра BC. За умовою кут між прямими A_1E і C_1D дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Отже, можливі два випадки:



Мал. 119

1) $\angle A_1OC_1 = \angle DOE = \frac{\pi}{3}$;

2) $\angle A_1OD = \angle C_1OE = \frac{\pi}{3}$.

Розглянемо перший випадок. Очевидно, що A_1C_1ED — рівнобедрена трапеція, тоді $DO = OE = DE = \frac{a}{2}$ (DE — середня лінія ΔABC) і $A_1O = OC_1 = A_1C_1 = a$. Звідси $A_1E = \frac{3a}{2}$. Висота призми

$$H = AA_1 = \sqrt{A_1E^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Об'єм призми $V = S_{ABC} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Для другого випадку маємо $\angle EA_1C_1 = \frac{\pi}{6}$. Проведемо $ET \perp A_1C_1$. Тоді

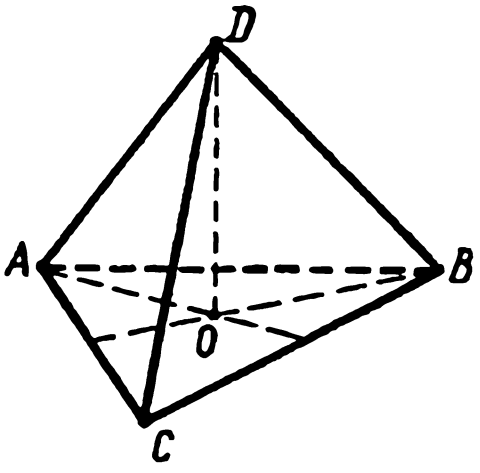
$$A_1T = \frac{1}{2}(DE + A_1C_1) = \frac{3a}{4}.$$

З ΔEA_1T $A_1E = \frac{A_1T}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Отже, $A_1E = AE$, що неможливо, оскільки A_1E — похила, а AE — її проекція на площину ABC.

Відповідь: $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Задача 17.

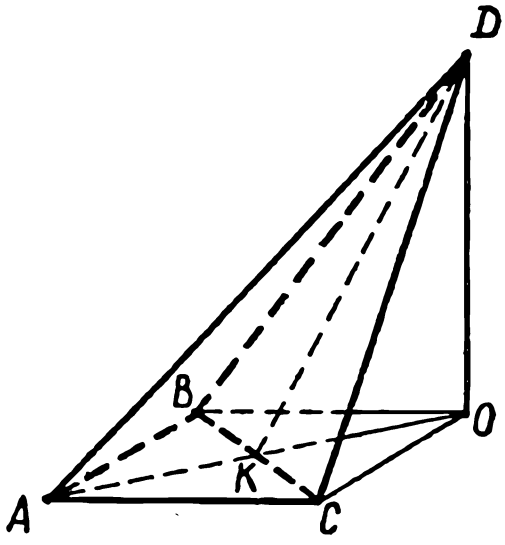
В основі піраміди — правильний трикутник зі стороною $\sqrt{6}$. Бічні грані піраміди рівновеликі. Одне з бічних ребер дорівнює $3\sqrt{2}$. Знайти об'єм піраміди.



Мал. 120

Розв'язання.

Оскільки ребра основи даної піраміди рівні, а бічні грані рівновеликі, то рівні й висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди. А звідси випливає, що рівні прямокутні трикутники, утворені висотою піраміди і висотами бічних граней. Отже, бічні грані даної піраміди утворюють рівні кути з площиною основи. Отже (доведіть самостійно!), точка O — проекція вершини піраміди на площину ABC — рівновіддалена від прямих, що містять сторони основи.



Мал. 121

Тоді можливі два випадки: O — центр вписаного кола ΔABC і O — центр зовнівписаного кола.

Розглянемо перший випадок (мал. 120).

Очевидною в цьому випадку є правильна піраміда, і $DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$, $AO = \sqrt{2}$.

Висота піраміди $H = DO = \sqrt{AD^2 - OA^2} = 4$.

Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} S_{ABC}\ H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$.

Якщо O — центр зовнівписаного кола (мал. 121), то легко показати, що $AO = 2AK = 3\sqrt{2}$ (K — середина BC).

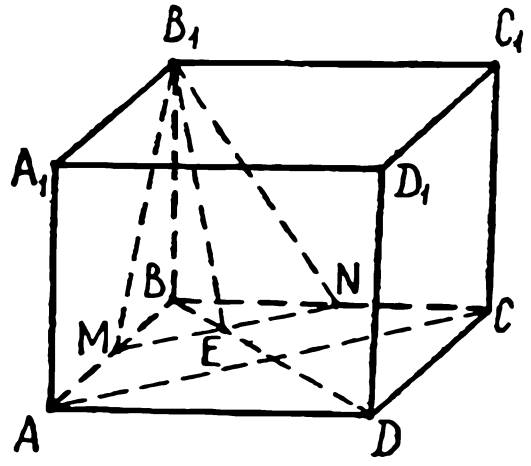
Отже, $AD \neq 3\sqrt{2}$. Звідси $DC = DB = 3\sqrt{2}$. Маємо

$$H = OD = \sqrt{DC^2 - OC^2} = 2\sqrt{3}.\ V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3.$$

Відповідь: $2\sqrt{3}$ або 3.

Задача 18.

Через вершину B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину, яка перетинає ребра BC і AB і утворює з гранню $ABCD$ кут α, причому в перерізі одержано рівнобедрений трикутник. Знайти площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.



Мал. 122

Розв'язання.

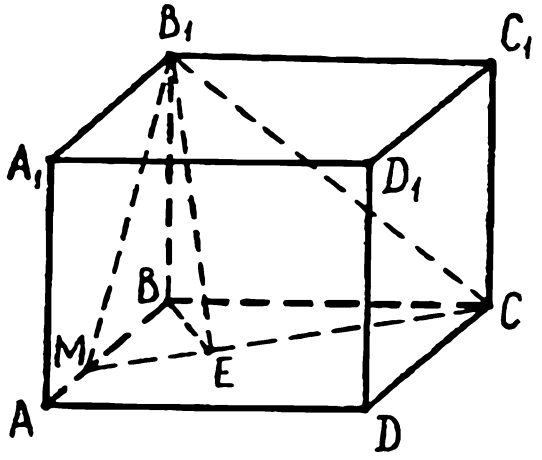
Нехай січна площина перетинає ребра BC і AB відповідно в точках N і M.

Можливі три випадки: основою рівнобедреного трикутника може слугувати MN або B_1M, або B_1N (очевидно досить з двох останніх випадків розглянути один).

I випадок.

Тут $MB_1 = NB_1$. Тоді $MB = BN$ і $BD \perp MN$ (мал. 122).

За теоремою про три перпендикуляри $B_1E \perp MN$ і, отже, $\angle B_1EB = \alpha$.



Мал. 123

$$S_{MB_1N} = \frac{S_{MBN}}{\cos\alpha} = \frac{EB \cdot ME}{\cos\alpha} = \frac{BE^2}{\cos\alpha} = \frac{a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

II випадок.

Маємо $MB_1 = MN$. $\Delta MB_1B = \Delta MBN$ за гіпотенузою і катетом, тоді $BB_1 = BN$. Отже, $N = C$ (мал. 123). Проведемо $BE \perp MC$. $\angle B_1EB = \alpha$. Нехай $CM = x$. Звідси

$$MB=\sqrt{x^2-a^2}.\ BE=a\operatorname{ctg}\alpha.$$

Маємо $MB\cdot CB=MC\cdot BE$. Тоді $\sqrt{x^2-a^2}\cdot a=xa\operatorname{ctg}\alpha$, $x=\dfrac{a\sin\alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}$.

$$S_{MB_1C}=\frac{1}{2}MC\cdot B_1E=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}\cdot\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{a^2}{2\sqrt{-\cos 2\alpha}}.$$

Відповідь: $\dfrac{a^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ або $\dfrac{a^2}{2\sqrt{-\cos 2\alpha}}$.

Задача 19.

S — вершина трикутної піраміди $SABC$. Бічні ребра піраміди рівні, а бічні грані рівновеликі. Знайти об'єм піраміди, якщо відомо, що бічні ребра дорівнюють по l, а $\angle ASB=2\alpha$.

Розв'язання.

Оскільки бічні грані — рівновеликі рівнобедрені трикутники з рівними бічними сторонами, то синуси плоских кутів при вершині S рівні, тобто

$$\sin\angle ASB=\sin\angle BSC=\sin\angle ASC.$$

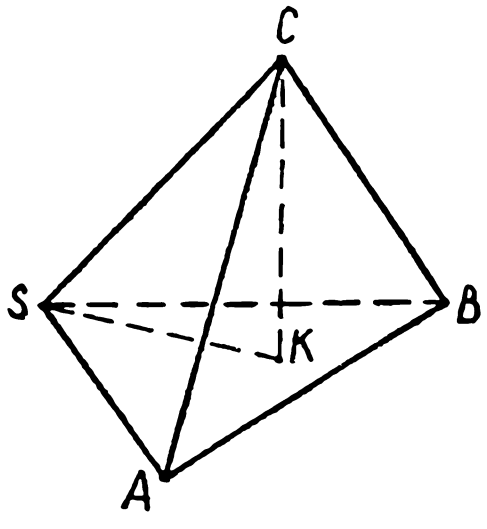
Звідси виникає необхідність розглянути три випадки.

I випадок.

$\angle ASB=\angle ASC=\angle BSC=2\alpha$.

Скористуємося добре відомим фактом, що проекція прямої SC на площину ASB містить бісектрису кута ASB.

Мабуть, для нас більш звично (зручніше) розглядати проекцію бічного ребра на основу піраміди, ніж на бічну грань. Тому «покладемо» дану піраміду на бічну грань ASB (мал. 124).



Мал. 124

$CK\perp$ пл. ASB, $\angle ASK=\angle KSB=\alpha$. За теоремою

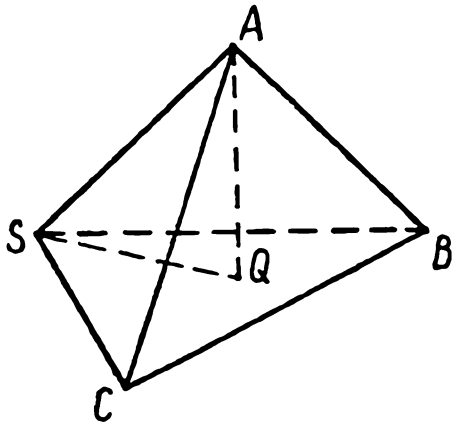
про три косинуси (докладно про цю теорему можна прочитати в [1]) $\cos\angle CSB = \cos\angle CSK \cdot \cos\angle BSK$, тобто
$\cos 2\alpha = \cos\angle CSK \cos\alpha$.

Звідси $\cos\angle CSK = \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$. Об'єм піраміди

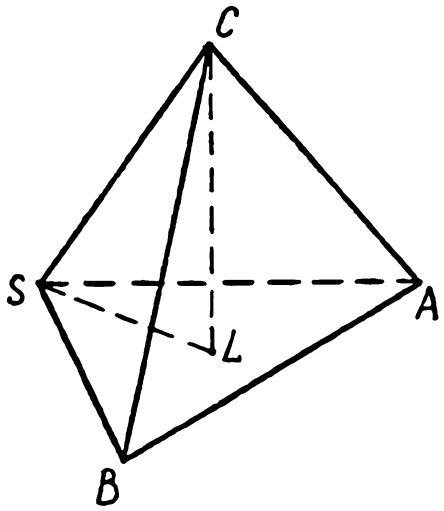
$$V = \frac{1}{3} S_{ASB} \cdot CK = \frac{1}{3} \frac{l^2 \sin 2\alpha}{2} \cdot l \cdot \sin\angle CSK =$$

$$= \frac{l^3 \sin 2\alpha}{6} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{l^3 \sin^2\alpha}{3} \sqrt{3 - 4\sin^2\alpha}.$$

Звернемо увагу читачів, що під час знаходження об'єма піраміди нам було все одно, належить точка K грані ASB чи ні.



Мал. 125



Мал. 126

II випадок.

$\angle CSA = \angle BSA = \alpha$, $\angle CSB = \pi - 2\alpha$ (мал. 125).

$AQ \perp$ пл. CSB, $\angle CSQ = \angle QSB = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Маємо $\cos\angle ASB =$
$= \cos\angle ASQ \cdot \cos\angle BSQ$, $\cos 2\alpha = \cos\angle ASQ \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$,
$\cos\angle ASQ = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$.

$$V = \frac{1}{3} S_{CSB} \cdot AQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{2} \sin(\pi - 2\alpha) \cdot l \cdot \sin\angle ASQ =$$

$$= \frac{l^3}{6} \sin 2\alpha \sqrt{1 - \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{l^3 \cos^2 \alpha}{3} \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}.$$

III випадок.

$\angle BSC = \angle ASC = \pi - 2\alpha$, $\angle ASB = 2\alpha$ (мал. 126).

Пропонуємо читачеві самостійно встановити, що тут ми одержали результат, який збігається з відповіддю в I випадку.

Відповідь: $\frac{l^3 \sin^2 \alpha}{3} \sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha}$ або $\frac{l^3 \cos^2 \alpha}{3} \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}$.

Вправи

1.1. Дві бічні сторони трикутника — 26 і 30, а висота, проведена на третю сторону, — 24. Обчислити медіану трикутника, проведену до третьої сторони.

1.2. Точка M віддалена від сторін кута в 60° на відстані $\sqrt{3}$ і $3\sqrt{3}$ (основи перпендикулярів, проведених з M на сторони кута, лежать на сторонах, а не на їх подовженнях). Пряма, яка проходить через M, перетинає сторони кута і відсікає трикутник периметра 12. Знайти площу цього трикутника.

1.3. Навколо рівнобедреного трикутника ABC ($AC = BC$) описано коло радіуса R. Кут C трикутника має величину α $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Точка E — середина дуги BC описаного кола. Знайти радіус кола, яке дотикається зовні описаного кола в точці E і прямої AB.

1.4. Дві прямі, перпендикулярні до сторони AC трикутника ABC, ділять цей трикутник на три рівновеликі частини. Відомо, що відрізки цих прямих, розміщені всередині трикутника, рівні між собою і дорівнюють стороні AC. Знайти кути трикутника ABC.

1.5. Кожний плоский кут тригранного кута з вершиною S має величину 60°. На ребрах тригранного кута взято відповідно точки A, B і C так, що $SA = 2a$, $SB = SC = a$. Знайти радіус сфери, яка дотикається ребер кута і площини ABC.

1.6. В основі піраміди $SABCD$ з вершиною S лежить рівнобічна трапеція $ABCD$ з меншою основою $AB = a$ і гострим

кутом α. Висота SO піраміди дорівнює h. Пряма AO перетинає сторону CD в точці K, яка є її серединою. Знайдіть кут, утворений бічною гранню SBC з площиною основи, якщо $AO : OK = 8 : 1$ і $\angle AOB = 90°$.

1.7. Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник ABC, довжина сторони якого дорівнює $2a$. Ортогональною проекцією призми на площину ABC є трапеція з бічною стороною AB і площею вдвічі більшою, ніж площа основи. Знайти висоту призми, якщо $AB_1 = b$.

1.8. В основі правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ лежить квадрат $ABCD$ з довжиною сторони, яка дорівнює a. Площини бічних граней утворюють з площиною основи піраміди кути, що дорівнюють α. На сторонах AD і BC основи взято точки E і F так, що $AE = \frac{2}{3}a$ і $CF = \frac{a}{3}$. Через ці точки проведено площину, яка утворює з площиною основи піраміди кут β. Знайти площу одержаного перерізу.

1.9. Довжина апофеми бічної грані правильної трикутної піраміди дорівнює k. Піраміду перетнуто площиною, рівновіддаленою від усіх її вершин. Знайдіть площу одержаного перерізу, якщо бічне ребро піраміди складає з площиною її основи кут величиною β.

1.10. Дано відрізок довжиною 2. Три кола радіуса 2 мають центри на кінцях відрізка і в його середині. Знайдіть радіус четвертого кола, яке дотикається трьох даних.

1.11. У трикутнику ABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$, $\sin \angle ABC = \frac{5}{13}$, $5a + 13b + 65c = 320$. Знайти a, b і c.

1.12. Основою піраміди $SABCD$ є прямокутник ABCD, довжина діагоналі якого дорівнює d, а $\angle CAD = \varphi$. Площі протилежних бічних граней ASB і CSD складають з площиною основи піраміди кути, величиною a і $2a$ відповідно. Визначте об'єм піраміди, якщо відомо, що $AS = BS$.

1.13. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = a$, $BC = a\sqrt{7}$. Кут між прямими CB_1 і BD_1 дорівнює 45°. Знайти AA_1.

1.14. Дано куб з основою $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, де $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. У кут A куба вписано кулю радіуса $R = 0{,}5$. Знайти радіус кулі, яка дотикається граней тригранного кута куба з вершиною C і даної кулі за умови, що ребро куба $a = 1{,}5$.

1.15. В основі чотирикутної піраміди лежить опуклий чотирикутник, дві сторони якого дорівнюють 6, а дві інші дорівнюють 10. Висота піраміди дорівнює 7. Усі бічні грані піраміди нахилено до площини основи під кутом 60°. Знайти об'єм піраміди.

Відповіді. Вказівки. Розв'язки.

Глава I.

7 клас.

Таблиця 7.1. 10. 40°; 140°; 40°; 140°. *Вказівка:* нехай $\angle AOB = x$, тоді $\angle COD = x$, $\angle BOC = \angle AOD = 180° - x$. Одержуємо рівняння $x = \frac{1}{8}(360° - x)$.

Таблиця 7.2. 6. $\Delta AMH = \Delta PNH$ (за II ознакою), оскільки $\angle MAP = \angle NPA$, $\angle MPA = \angle NAP$, AP — спільна сторона. $\Delta AMH = \Delta PNH$ (за II ознакою), оскільки $AM = PN$, $\angle AMH = \angle PNH$ (з рівності ΔAMP і ΔPNA),

$$\angle MAH = \angle NPH, \quad (\angle MAH = 180° - \angle AHM - \angle AMH,$$
$$\angle NPH = 180° - \angle NHP - \angle PNH).$$

Таблиця 7.3. 6. *Вказівка:* $\angle AEB = \angle CEB$. **9.** *Вказівка:* використати рівність ΔADF і ΔCDE, звідки

$$\angle DAF = \angle DCE \text{ і } \angle AEC = \angle AFC.$$

Таблиця 7.4. 8. Так. *Розв'язання:* $\angle BAC = \angle BCA = 80°$, тоді $\angle BAP = 80° - 40° = 40°$, $\angle KPA = \angle PAK = 40°$, звідки $\angle PAC = \angle APK$ і $a \parallel b$.

Таблиця 7.5. 6. 34°. *Розв'язання:* $\angle NMP + \angle MNK = 180°$, звідки $NK \parallel MP$, $\angle MPK = 68°$, $\angle KPT = 34°$. Звідси $\angle PTK = \angle TPM = 34°$. **7.** *Вказівка:* через точку C провести пряму, паралельну AB. **8.** *Доведення:*

$$\angle AME + \angle BEM = 180°, \text{ тоді}$$
$$\angle OME + \angle OEM = 0{,}5\,(\angle AME + \angle BEM) = 90°,$$

тоді з ΔMEO: $\angle MOE = 90°$.

Таблиця 7.6. 12. 30°, 60°, 90°.

Таблиця 7.7. 1. 90° *Розв'язання:*

$$\angle ABD + \angle BAD + \angle CBD + \angle DCB = 180°;$$

$2\,(\angle ABD + \angle CBD) = 180°$, $\angle ABC = 90°$. **2.** 80°. *Розв'язання:* $\angle ABC = 180° - 2\,(\angle OAC + \angle OCA) =$

$$= 180° - 2\,(180° - \angle AOC) = 180° - 2 \cdot 50° = 80°.$$

5. 360°. **8.** 20°. *Розв'язання:* $\angle DFB = 110°$, $\angle ADC = 140°$, звідки $\angle A = 20°$.

9. $180° - (\alpha + \beta + \gamma)$. *Вказівка:* $\angle BEC = \alpha + \beta$.

Таблиця 7.8. 3. $\Delta ABD = \Delta DCA$; $\Delta ABE = \Delta DCE$. 4. 8. *Вказівка:* відкласти на промені BC відрізок $CD = BC$. Розглянути ΔABD. 8. 14. *Вказівка:* показати, що ΔABE — рівнобедрений.

Таблиця 7.9. 3. *Вказівка:* розглянути ΔAOB і ΔBOC. 5. *Доведення:* $\Delta BOE = \Delta COF$ (за III ознакою), звідки $BA = CD$ як відповідні висоти. 8. *Доведення:* $\Delta COD = \Delta AOB$ (за III ознакою), звідки $\angle D = \angle B$ і $DC \parallel BA$. 12. *Доведення:* нехай точки M, N, P, K — точки дотику сторін AB, BC, CD і DA з колом відповідно. Тоді $AM = AK$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DK$ (задача 11),

$$AB + CD = AM + MB + CP + PD =$$
$$= AK + BN + NC + KD = AD + BC.$$

8 клас.

Таблиця 8.1. 9. *Доведення:* проведемо AC. AC перетинає EK в точці O. $CO = OA$, $BO = OK - KB$, $OD = OE - DE$. Оскільки $OK = OE$, то $OB = OD$. Отже, $ABCD$ — паралелограм.

Таблиця 8.2. 3. *Доведення:* оскільки $BM \parallel DE$, то $\angle ABC = \angle ADC$. $\angle BAD = \angle BCD$ (як відповідні зовнішні кути ΔAMD і ΔCEB). Звідси $ABCD$ — паралелограм. 6. *Доведення.* $\Delta BNC = \Delta DKA$ (за першою ознакою), звідси $BC = AD$. З рівності $\Delta ABM = \Delta CDP$: $AB = CD$. Отже, $ABCD$ — паралелограм. 8. *Вказівка:* довести рівність трикутників ΔBOC і ΔDOA. 9. *Вказівка:* довести, що $\Delta AOB = \Delta COD$.

Таблиця 8.3. 4. *Доведення:* $\angle PBK + \angle ADC = 180°$, $\angle ADC + \angle BCD = 180°$, звідки $\angle PBK = \angle BCD$. 5. *Доведення:* з рівності ΔABC і ΔCDA (за III ознакою): $\angle PAD = \angle BCE$. $\Delta ADP = \Delta CEB$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Звідси $AP = CE$.

Таблиця 8.4. 3. *Розв'язання:* З ΔBOE ($\angle E = 90°$, $\angle B = 30°$) $OB = 2OE = 8$, $BD = 2OB = 16$. $AC = BD = 16$.

Таблиця 8.5. 3. *Розв'язання:* нехай $\angle DBE = x$, тоді $\angle BDE = 2x$. З ΔEBD: $x + 2x + 120° = 180°$. $x = 20°$. $\angle ADB = 40°$. Тоді $\angle ADC = \angle ABC = 80°$, $\angle BAD = \angle BCD = 100°$. 5. *Доведення:* $\angle BAN + \angle ABN = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = 90°$, звідси з ΔABN $\angle N = 90°$. Тоді $\angle MNP =$

$= 90°$. Аналогчіно для інших кутів $MNPK$. **6.** $60°$. *Вказівка:* показати, що ΔBCD — рівнобічний. **8.** *Доведення:* $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1$ (з рівності: $\Delta A_1BB_1 = \Delta B_1CC_1 = \Delta C_1DD_1 = \Delta D_1AA_1$). Нехай $\angle BB_1A_1 = \alpha$, тоді

$$\angle BA_1B_1 = \angle CB_1C_1 = 90° - \alpha.$$

$$\angle A_1B_1C_1 = 180° - (\alpha + 90° - \alpha) = 90°.$$

Отже, $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

Таблиця 8.6. 5. $60°$, $60°$, $120°$, $120°$. *Розв'язання:* $\angle BCA = \angle CAD$ (як внутрішні, що лежать навхрест), $\angle CAD = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}\angle ADC$. Нехай $\angle CAD = x$. З ΔACD: $x + 2x = 90°$; $x = 30°$; $\angle CDA = \angle BAD = 60°$, $\angle ABC = \angle BCD = 120°$. **6.** $\frac{b-a}{2}$; $\frac{b+a}{2}$. **7.** 10. *Вказівка:* ΔACE — рівнобедрений. **8.** 15. *Вказівка:* трикутники ABD і BCD — прямокутні рівнобедрені. Провести $BE \perp AD$. **9.** 40. *Розв'язання:* $\angle BCE = \angle CED = 30°$, $\angle OAD = \angle OEA + \angle AOE$, звідки $\angle AOE = \angle BOC = 30°$. ΔBOC і ΔOAE — рівнобедрені. $BO = OA = AE = 5$. З ΔECD ($\angle C = 90°$, $\angle E = 30°$): $CD = \frac{1}{2}ED = 10$. $P_{ABCD} = 5 + 15 + 10 + 10 = 40$.

Таблиця 8.7. 3. 6. **4.** $x = 16$, $y = 14$. *Розв'язання:* $\frac{8}{x} = \frac{7}{30-x}$. $x = 16$, $y = 14$. **5.** $x = 2{,}5$; $y = 4{,}375$. **6.** 1:3. *Розв'язання:* проведемо $KE \parallel BM$. $AE : EM = AK : KB$, звідси $AE = EM = 2$. $KN : NC = EM : MC = 2 : 6 = 1 : 3$. **7.** 4 : 1. **9.** 1:2.

Таблиця 8.8. 1. 14. **3.** 20. *Розв'язання:* $P_{A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 20$. **5.** $\frac{b-a}{2}$; $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{2}$. *Розв'язання:* ME — середня лінія ΔABC, $ME = \frac{a}{2}$. Аналогічно, $FN = \frac{a}{2}$. $EF = MN - 2ME = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$. **6.** *Вказівка:* провести діагоналі BD і AC. **8.** *Вказівка:* EF і PK — середні лінії ΔABC і ΔDBC відповідно. **9.** *Вказівка:* провести $BF \parallel CD$. **11.** 5; 6; 7. **12.** 4 і 6. *Розв'язання:* Для трапеції

$PBCK$: $\frac{y+2}{2} = x$. Для трапеції $AMND$: $\frac{x+8}{2} = y$. Розв'язуючи систему, одержуємо $x = 4$, $y = 6$.

Таблиця 8.9. 3. Ні. $AC + BC = 7 + BC$, $AB = 10 + BC$, тобто $AB > AC + BC$, що неможливо. **4.** $x \in (1; 9)$. *Вказівка:* $BC - AB < x < AB + BC$. **8.** $x \in (2; 10)$. *Вказівка:* подовжити медіану CD на її довжину (точка D_1). Розглянути ΔCBD_1. **9.** 2. **10.** 7 або 8. **11.** 7.

Таблиця 8.10. 3. $l(\cos\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - \sin\alpha)$; $\frac{l\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$. *Розв'язання:* з ΔADC: $AC = l\cos\alpha$, $DC = l\sin\alpha$. З ΔABC: $y = \frac{l\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$; $BC = l\cos\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$. $x = BC - DC = l\cos\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - l\sin\alpha$. **4.** $m(\sin\beta - \cos\beta \operatorname{tg}(\beta - \alpha))$. **6.** $m\cos\alpha$; $m\cos^2\alpha$. **7.** $a \operatorname{ctg}\alpha \times \sin\beta$; $\operatorname{ctg}\alpha\cos\beta$. **9.** 8. *Розв'язання:* проведемо $BE \perp AD$. $\angle ABE = 30°$. З ΔABE: $AE = BE \operatorname{tg} 30° = 2$. $AD = AE + ED = 8$. **10.** 7. *Розв'язання:* з ΔCED: $ED = CE \operatorname{ctg}\angle CDE = 1$. $AD = BC + 2ED = 5 + 2 = 7$. **11.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. *Розв'язання:* з ΔADC: $AC = 2DC = 8$. $AE = EC = 4$. З ΔABE: $BE = AE \operatorname{tg} 30° = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. **12.** $10\sqrt{3}$.

Таблиця 8.11. 1. *Розв'язання:* $AD = 13 - 3 = 10$. З ΔADC: $AC = \sqrt{100 + 16} = \sqrt{116}$. З ΔDBC: $BC = 5$. З ΔABC: $AC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. $12 \neq \sqrt{116}$. $BD \neq 3$ **2.** $4\sqrt{3}$ і $8\sqrt{3}$. **6.** 12; 16. *Розв'язання:* з ΔABC: $\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. З ΔCDB: $\operatorname{tg}\angle CBD = \frac{x}{y}$. $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$. Нехай $x = 3k$, $y = 4k$. $(3k)^2 + (4k)^2 = 20^2$, $k = 4$, $x = 12$, $y = 16$. **7.** $\frac{3}{4}\sqrt{15}$. Нехай $AD = y$, тоді $DK = 8 - y$. З ΔAMD: $MD^2 = 6^2 - y^2$. З ΔMDK: $MD^2 = 4^2 - (8 - y)^2 = 36 - y^2 = 16 - (8 - y)^2$. $y = \frac{21}{4}$. З ΔAMD: $x = \sqrt{6^2 - \left(\frac{21}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{15}$. **8.** $12\sqrt{13}$ і $18\sqrt{13}$. *Вказівка:* $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = 36$. **9.** $2\sqrt{13}$. **10.** $3\sqrt{5}$. *Розв'язання:*

$$AC^2 = AB \cdot AD.\ 36 = AB(AB - 5).\ AB = 9.$$

З ΔABC: $x = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3\sqrt{5}$. **11.** $12\sqrt{2}$ і 16. *Розв'язання:* з ΔADC: $CD = \sqrt{32}$. З ΔABC: $32 = 2 \cdot BD$. $BD = 16$. $y = AD + DB = 18$. З ΔCDB: $x = BC = \sqrt{1\,6^2 + 32} = 12\sqrt{2}$. **12.** $4\sqrt{2}$.

Таблиця 8.12. 7. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. 8. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$. 12. $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Таблиця 8.13. 3. 0,8; $-0{,}6$; $-\frac{4}{3}$. 5. $x = -3$ 6. $y = 1{,}5x$. 8. $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$. *Розв'язання:* $y = kx + b$ — спільне рівняння прямої. $k = \operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$; $y = -\sqrt{3}x + b$. Оскільки $y(4) = 0$, то $-4\sqrt{3} + b = 0$, $b = 4\sqrt{3}$. $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$. 10. $5y - 3x + 7 = 0$. *Вказівка:* k і x знаходять із системи

$$\begin{cases} 4k + b = 1, \\ -k + b = -2. \end{cases}$$

11. *Розв'язання:* пряма $y = -3$ не перетинає коло.

Таблиця 8.14. 4. Так. *Розв'язання:* $\bar{a} = \overline{(2; 1)}$, $\bar{b} = \overline{(2; 1)}$. 5. $\overline{(-3; 6)}$. 6. $\overline{AB}\,(8; 5)$, $\overline{AD}\,(8; -5)$. 7. *Доведення:* $\overline{AB}\,(6; -2)$, $\overline{DC}\,(6; -2)$. Оскільки $\overline{AB} = \overline{DC}$, то $AB = DC$ і $AB \parallel DC$ і $ABCD$ — паралелограм. 8. *Доведення:* $\overline{EC} + \overline{CB} + \overline{BD} = \overline{ED}$. $\overline{EC} + \overline{BA} = \overline{EC} + \overline{CD} = \overline{ED}$. 10. $\overline{DE} = -\frac{1}{2}\overline{CA}$. 11. $\overline{PK} = \frac{1}{2}(\overline{OA} - \overline{OB})$. 12. *Вказівка:* подовжити медіану BM на її довжину.

Таблиця 8.15. 1. $\bar{x} = \bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$. 2. $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{b})$. 3. $\bar{x} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$. 4. *Доведення:* склавши за правилом паралелограма вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, одержимо вектор $\bar{d}$ такий, що $|\bar{d}| = |\bar{b}| = |\bar{a}|$, оскільки паралелограм, побудований на векторах $\bar{b}$ і $\bar{a}$, буде ромбом з тупим кутом 120°, а менша діагональ такого ромба дорівнює його стороні; $\bar{d}$ і $\bar{c}$ рівні за модулем і протилежно направлені, тому $\bar{d} + \bar{c} = 0$, тобто $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$. 5. *Вказівка:* скласти вектори $\bar{a}$ і $\bar{c}$. 6. 6,5. *Розв'язання:* $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{AC} - \overline{DC} = \overline{AD}$, $\overline{AD} - \overline{OD} = \overline{AO}$.

$|\overline{AO}| = 6{,}5$. 7. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. *Вказівка:* $\cos\angle B = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}$. 8. 8. 9. $\overline{AB}\cdot\overline{AC} \neq 0$. 10. $\sqrt{19}$, $\sqrt{7}$. *Розв'язання:*

$$|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{(\bar{a}+\bar{b})^2} = \sqrt{\bar{a}^2+\bar{b}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}} =$$
$$= \sqrt{4+9+2\cdot 2\cdot 3\cdot 0{,}5} = \sqrt{19}.$$

11. $y = 9 - x$. *Розв'язання:* $\overline{OM}(2; 2)$. Нехай точка $E(x; y)$ лежить на прямій MP. Тоді $\overline{ME}(x-4; y-5)$. $\overline{ME}\cdot\overline{OM} = 0$. $2x - 8 + 2y - 10 = 0$, $y = 9 - x$. 12. $y = 6x - 14$.

9 клас.

Таблиця 9.1. 3. 10,5; 7,5. 4. 20; 18; 16. *Вказівка:* $k = \frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = 2$. 5. 16; 12. *Розв'язання:* $a : b : c = x : y : 20 = 4 : 3 : 5$. $x = 4k$, $y = 3k$, $20 = 5k$, $k = 4$. $x = 16$, $y = 12$. 6. 30; 36; 42.

Таблиця 9.2. 4. $\Delta ABC \backsim \Delta CAD$ (за двома кутами). 8. $\Delta ABC \backsim \Delta ADB \backsim \Delta BDC$. 9. $\Delta MPK \backsim \Delta NEK \backsim \Delta NPO \backsim \Delta MEO$. 12. $\Delta ABC \backsim \Delta PBK \backsim \Delta FCK$. 13. $\Delta ABC \backsim \Delta KBP \backsim \Delta MEP \backsim \backsim NEC$.

Таблиця 9.3. 5. $\Delta ABC \backsim \Delta BDC$. *Доведення:* $\angle C$ — спільний, $\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CB} = \frac{4}{3}$. 9. $\Delta ABC \backsim \Delta PBK$. *Доведення:* $\angle B$ — спільний, $\frac{AB}{BP} = \frac{BC}{BK}$. 10. $\Delta ACB \backsim \Delta A_1CB_1$. *Доведення:* $\angle C$ — спільний. З ΔACA_1: $\cos\angle C = \frac{A_1C}{AC}$, з ΔBCB_1: $\cos\angle C = \frac{B_1C}{BC}$, $\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC} = \cos\angle C$. $k = \cos\angle C$. 11. $\Delta ABC \backsim \backsim \Delta A_1B_1C$, $k = \cos\angle C$. 12. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C$, $k = \cos\angle C$.

Таблиця 9.4. 1. 60°. 3. 90°. 4. 140°. 6. 160°. 9. 55°. *Розв'язання:* проведемо DC. $\angle DCA = \angle DBA = 35°$, $\angle ADC = 90°$. Из ΔADC: $\angle DAC = 55°$. 10. 25°; 130°. *Розв'язання:* проведемо BC. $\angle BCE = \angle BAE = 25°$,

$$\angle BCE = \angle CBE = \angle CAE = 25°,$$
$$\angle BAC = 50°,\ \angle BEC = 130°.$$

11. 50°. 12. 60°. *Розв'язання:*

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD.\ \angle BAC = 20°,$$
$$\angle CAD = 40°,\ \angle BAD = 60°.$$

Таблиця 9.5. **1.** 50°. **3.** 70°. *Розв'язання:* $\angle AEB = 100°$, $\angle DBE = \angle EAB = 30°$, $\angle EDB = \angle AEB - \angle DBE = 70°$. **4.** 30° **6.** 50°. **7.** $\alpha + \beta$. **8.** *Доведення:* $\angle DAE = \angle DFE$, $\angle DKA = \angle EKF$, $\Delta DAK \sim \Delta EFK$ (I ознака), звідси $\frac{DK}{KE} = \frac{AK}{KF}$, $DK \cdot KF = AK \cdot KE$. **9.** 2. *Вказівка:* скористатися результатом задачі **8.** **11.** *Доведення:* Проведемо BC і BD. $\Delta ABD \sim \Delta ACB$ (див. задачу **10**). $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$, $AB^2 = AC \times AD$. **12.** *Вказівка:* провести з точки P дотичну до кола і скористатися результатом задачі **11**.

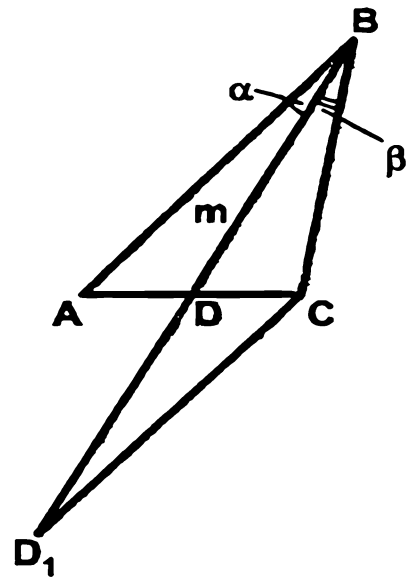
Таблиця 9.6. **1.** $3\sqrt{2}$. **2.** $\sqrt{37}$. **3.** 1 **5.** $\frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$. **7.** $\frac{m \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Розв'язання: з ΔABD: $\frac{m}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma}$;

$AB = \frac{m \sin \gamma}{\sin \beta}$.

З ΔABC: $\frac{x}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)}$;

$$x = \frac{m \sin \beta \sin \gamma}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \frac{m \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



Мал. 127

8. $\frac{b \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \sin \gamma}$. *Вказівка:* знайти AB з ΔABC, потім розглянути ΔABD.

9. 12. *Розв'язання:* з ΔABC:

$$\cos \angle A = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{5}{13} \cdot \sin \angle A = \frac{12}{13}.$$

З ΔABD: $BD = AB \sin \angle A = 12$. **10.** 1 і 3. *Розв'язання:* $x^2 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \frac{1}{2} = 13$. $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x = 1$, $x = 3$. Для обох випадків нерівність трикутника виконується.

$$\textbf{11. } 2m\sqrt{1 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} - \frac{4 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}}.$$

Розв'язання. подовжимо медіану BD на її довжину (мал. 127).

Розглянемо ΔBCD_1. З ΔBCD_1: $BC = \frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. З ΔDBC:

$$DC = \sqrt{m^2 + \frac{2m^2\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{4m^2\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}.$$

$$AC = 2m\sqrt{1 + \frac{2\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{4\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}.$$

12. 15° або 105°. *Розв'язання:* з ΔABC: $\frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin\angle C}$; $\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{12}{\sin\angle C}$; $\sin\angle C = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 1) $\angle C = 45^\circ$, 2) $\angle C = 135^\circ$; 1) $x = 105^\circ$, 2) $x = 15^\circ$.

Таблиця 9.7. 1. $\frac{a\cos\gamma\operatorname{tg}\varphi}{\cos\alpha\sin\beta} \cdot \frac{a\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\beta\cos\varphi}$. *Розв'язання:* з ΔABC: $AB = \frac{a}{\cos\alpha}$; з ΔABD: $AD = \frac{a}{\cos\alpha\sin\beta}$; з ΔADE: $AE = \frac{a\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\beta}$. З ΔAFE:

$$x = \frac{a\cos\gamma\operatorname{tg}\varphi}{\cos\alpha\sin\beta}, \quad y = \frac{a\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\beta\cos\varphi}.$$

2. $\frac{b\cos\beta\sin\gamma}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}$, $\frac{b\cos\beta\sin\gamma}{\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi}$. **3.** $\sqrt{AC^2 + b^2 - 2AC\cdot b\cdot\cos\beta}$, де $AC = \frac{a}{\sin\alpha}$. **4.** $\cos x = \frac{b^2 + c^2 - a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{2bc}$. **5.** $\frac{b\sin\gamma}{\cos\alpha\sin\beta}$.

6. $\sin x = \frac{c\sin\beta\sin\alpha}{a}$ (можливі два значення кута).

7. $\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

8. $x = \frac{BD}{\sin\gamma}\sin(\beta+\gamma)$, $BD = \sqrt{b^2 + d^2 - 2bd\cos\alpha}$.

9. $\sin x = \frac{\sin\gamma}{BC}\cdot BD$, де

$$BD = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad BC = \sqrt{BD^2 + a^2 - 2BD\,a\cos\alpha}.$$

10. $\sqrt{AD^2 + DC^2 + 2AD\cdot DC\sin(\gamma-\beta)}$, де $AD = d\operatorname{tg}\beta$;

$DC = \frac{BD \sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha}$. **11.** $x = \sqrt{MB^2 + BC^2}$, $\operatorname{tg} y = \frac{BC}{MB}$, де $MB = \frac{m \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $BC = \sqrt{b^2 + m^2 - 2bm\cos(\alpha+\gamma)}$.

12. $\cos x = \frac{CD^2 + a^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot CD}$, де $BD = \frac{c \sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma}$,

$$DC = \sqrt{b^2 + \left(\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}\right)^2 - \frac{2bc\sin\beta\sin\alpha}{\sin\gamma}}.$$

Таблиця 9.8. 1. 18. *Розв'язання:* $n = \frac{360^\circ}{20^\circ} = 18$. **2.** 12. *Розв'язання:* $180^\circ(n-2) = 150^\circ n$, $n = 12$. **3.** 9. *Розв'язання: перший спосіб:* $\angle ABC = 140^\circ$, далі як у задачі **2**. *Другий спосіб:* оскільки сума зовнішніх кутів опуклого многокутника 360°, то $n = 360^\circ : 40^\circ = 9$. **4.** 10. **5.** $r = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$, $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$. **8.** $R = a$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $r = R\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таблиця 9.9. 3. 16. *Вказівка:* $AC = DC\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. **7.** 27. *Розв'язання:* проведемо $BD \perp AC$. З ΔAOD: $OD = 4$, $BD = BO + OD = 9$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$. **8.** 30. *Розв'язання:* для ΔABC $(\angle C = 90^\circ)$ $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - c = p - c$, $p = c + r$. $p = 13 + 2 = 15$. $S = p \cdot r = 15 \cdot 2 = 30$.
9. $27 + 18\sqrt{3}$. *Розв'язання:* проведем $OE \perp AC$. З ΔAOE: $AE = 3\sqrt{3}$. $AC = 3\sqrt{3} + 3$. З ΔABC: $AB = 2(3\sqrt{3} + 3)$.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2(3 + 3\sqrt{3}) \cdot (3 + 3\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3})^2 = 9\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}).$$

10. 294. *Розв'язання:* $AC : CB = AD : DB = 3 : 4$. Нехай $AC = 3x$, $BC = 4x$. $(3x)^2 + (4x)^2 = 35^2$, $5x = 35$, $x = 7$. $AC = 21$, $BC = 28$. $S = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 28 = 294$. **11.** 336. *Розв'язання.* $AM = AD = 12$, $CK = CD = 14$, $BK = BM = (84 - (2 \cdot 12 + 2 \cdot 14)) : 2 = 16$. $AB = 28$, $BC = 30$, $AC = 26$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 336$.

12. 3000. *Розв'язання:* з ΔBCD ($DC = 8x$, $\angle D = 90°$) $BD = 15x$. $P_{ABC} = 25x$. $S_{ABC} = 25x \cdot 24 = \frac{1}{2} \cdot 16x \cdot 15x$, $x = 5$, $S = 600 \cdot 5 = 3000$.

Таблиця 9.10. 3. 78. *Розв'язання:* з ΔABC: $BE = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13 = 39$, $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 78$. **4.** 120. *Розв'язання:* нехай $AE = FC = x$. З ΔABC: $x(16 + x) = 36$, $x = 2$. $AC = 20$, $S_{ABC} = 60$, $S_{ABCD} = 120$. **7.** $20\sqrt{3}$. *Розв'язання:* з ΔABE: $AE = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$. З ΔBDE: $DE = 1$, $AD = 5$, $S_{ABCD} = 5 \cdot 4\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ **8.** $12\sqrt{2}$. *Розв'язання:* $S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin 45° = 3\sqrt{2}$. $S_{ABCD} = 4S_{COD} = 12\sqrt{2}$. **11.** 1404. *Розв'язання.* $AB:AF = BE:EF = 13:5$. $AB = 13x$, $AF = 5x$. З ΔABF: $BF = 12x = 36$, $x = 3$. $AD = AB = 39$, $S = 39 \cdot 36 = 1404$. **12.** 320. *Розв'язання:* з ΔBOC: $4x^2 = 64$, $x = 4$, $BC = 20$, $S = 2 \cdot 8 \cdot 20 = 320$.

Таблиця 9.11. 3. 25. *Розв'язання:* Проведемо $CK \parallel AB$. $DF = FK = 2$. $DK = 4$, $AD = 7$. $S = \frac{3 + 7}{2} \cdot 5 = 25$. **4.** $25\sqrt{3}$. *Вказівка:* $AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$. **5.** 625. *Вказівка:* $h = \frac{1}{2} \times$ $\times (AD + BC)$. **6.** 192. *Розв'язання:* проведемо $CE \perp AD$.

$$AE = \frac{1}{2} \cdot (25 + 7) = 16.$$

З ΔACE: $CE = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$. $S = 12 \cdot 16 = 192$. **7.** 144. **8.** $120\sqrt{3}$. *Розв'язання:* з ΔACD: $AD = 12\sqrt{3}$, $AC = 24$. Проведемо $BE \perp AC$. $AE = EC = 12$. З ΔBEC: $BC = \frac{12 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$. $S_{ABCD} = \frac{8\sqrt{3} + 12\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 120\sqrt{3}$. **9.** 3630. *Розв'язання:* з ΔCOD ($\angle COD = 90°$): $OE = r = \sqrt{25 \cdot 36} = 30$, $AB = 2r = 60$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AB = \frac{1}{2}(60 + 61) \cdot 60 = 3630$. **10.** $65\frac{1}{3}$. **11.** 468. *Розв'язання:* проведемо $CE \parallel AB$. $CE = 25$, $ED = 17$. $S_{CED} = 204$. $h = \frac{2S_{CED}}{ED} = \frac{2 \cdot 204}{17} = 24$. $S_{ABCD} = \frac{11 + 28}{2} \times$ $\times 24 = 468$. **12.** 42. *Вказівка:* провести $CE \parallel BD$. Знайти S_{ACE}

Таблиця 9.12. 2. 6:5. **5.** 11:4. *Розв'язання:*

$$S_1 : S_2 = (S_1 + S_2 - S_2) : S_2 = \frac{9 \cdot 5 - 4 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{33}{12} = \frac{11}{4}.$$

8. 5:4. *Розв'язання:* $S_1 : S_2 = BK : KD = S_3 : S_4 = 5 : 4$. **9.** 2:7. **10.** 1:3. **12.** 1. *Розв'язання:*

$$S_{ABE} = S_{ABD} - S_{AED} = S_{ACD} - S_{AED} = S_{CDE}.$$

Таблиця 9.13. 5. $\frac{S}{2}$. *Розв'язання:*

$$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB} = \frac{1}{2} S_{ABCD},\ S = \frac{1}{2} S_{ABCD},$$

$$S_{BCE} = S_{AED} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S.$$

7. $2S$. **8.** $2S$. **9.** $S_1 + S_2$. *Розв'язання:* проведемо EF. $S_{PEF} = S_{PBC} = S_1$, $S_{FKE} = S_{AKD} = S_2$ (див. задачу **12** з таблиці **9.12**). $S_{PEKF} = S_1 + S_2$. **10.** $2S$. *Розв'язання:* проведемо MP. $MBCP$ і $MADP$ — паралелограми.

$$S_{MBCP} = 2S_{MKP},\ S_{MADP} = 2S_{MEP},\ S_{ABCD} = 2(S_{MEP} + S_{MKP}) = 2S.$$

11. $S_1 + S_2$. **12.** $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. *Вказівка:* провести MP, розглянути паралелограми $MBCP$ і $MADP$.

Таблиця 9.14. 2. 60π. **4.** 24π. **5.** $\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) R^2$. *Розв'язання:* $S_{\Delta OPE} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$. $S_x = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot 135^\circ - S_{\Delta OPE} = R^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

6. $\frac{R^2}{2}\left(\frac{5}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **8.** $300 - 13\pi$. *Розв'язання:* $S_{O_1O_2O_3O_4} = 15 \cdot 20 = 300$. $S = 300 - 4\pi - 9\pi = 300 - 13\pi$.

10. $12{,}5\pi$. **11.** $16 - -4\pi$. *Розв'язання:*

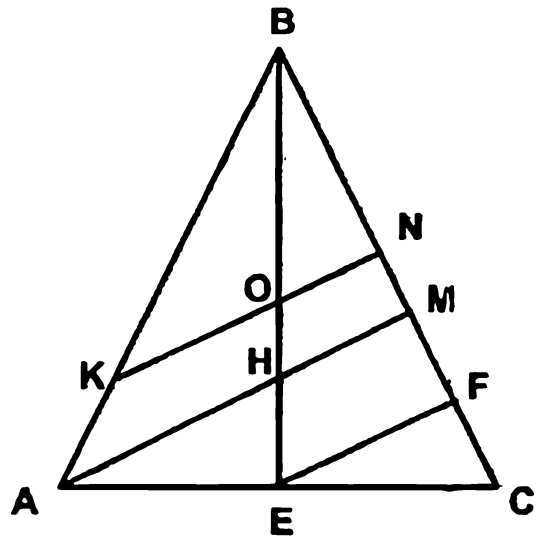
$$S_{O_1O_2O_3O_4} = 4^2 = 16.\ S_{MNPK} = 16 - 4\pi.$$

12. $16\sqrt{3} - 8\pi$. *Розв'язання:* $S_{O_1O_2O_3} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

$$S_{MNK} = 16\sqrt{3} - 0{,}5 \cdot \pi \cdot 4^2 = 16\sqrt{3} - 8\pi.$$

Глава II.

§1. 1.2. 2:3. *Вказівка:* проведіть $MN \parallel CD$. **1.3.** 1 : 2. *Вказівка:* скористайтеся тим, що діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл. **1.4.** 2:5. **1.5.** 3:1:4. *Вказівка:* скористайтеся тим, що медіани трикутника точкою перетину діляться у відношенні 2:1, рахуючи від вершини. **1.6.** 4 : 1. *Вказівка:* провести $PL \parallel AD$, де L належить відрізку MC. **1.7.** 4:3. *Вказівка:* провести $A_1D \parallel CC_1$. **1.8.** 3:2. *Вказівка:* BE — медіана трикутника DBC. Провести $DP \parallel ET \parallel AM$ (точки P і T лежать на стороні BC). **1.9.** $2\sqrt{7} + 8$. *Вказівка:* нехай E — точка перетину медіан трикутника ABC. Провести $EF \perp BC$. $EF = \frac{1}{3}AH$. Застосувати теорему Піфагора до трикутників EBF і EFC. **1.10.** $\frac{2}{3}$. *Вказівка:* проведемо висоти BE і AM (мал. 128). Через центр O описаного кола проведемо $KN \parallel AM$. Проведемо $EF \parallel AM$. $\cos \angle ABC = \frac{BN}{BK}$.

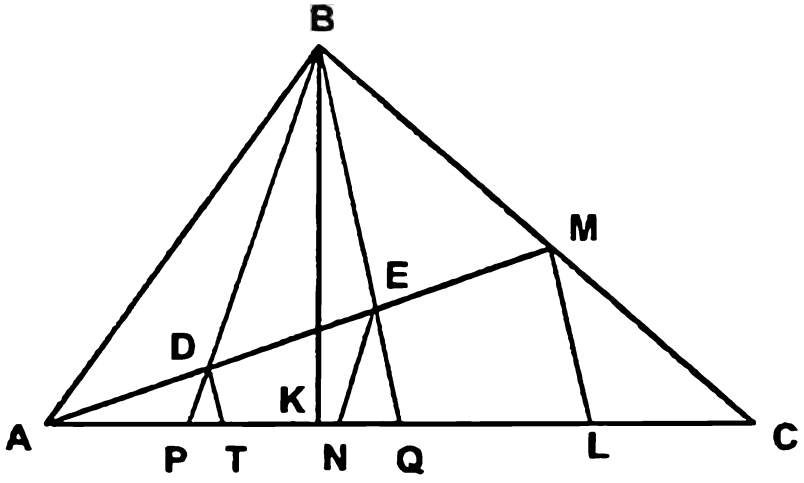


Мал. 128

1.11. 450. *Вказівка:* провести $DK \parallel CC_1$. Показати, що $AC_1 : AB = 1 : 3$. Провести $C_1N \perp AD$, N належить AD. **1.12.** $6\sqrt{3}$. *Вказівка:* проведемо $DF \perp AC$. Нехай O — точка перетину висоти BE і медіани AD. Показати, що $BE = 4OE$ і $AE = EF = FC$. **1.13.** $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cos\beta}$. *Вказівка:* O — середина висоти CD. BO перетинає AC в точці K. Провести $DP \parallel BK$.

$$\frac{KA}{CK} = \frac{PA + KP}{CK} = \frac{\frac{PA}{KP} + 1}{\frac{CK}{KP}} = \frac{AD}{DB}.$$

1.14. $\frac{\alpha}{2}$. *Вказівка:* провести $DK \parallel AB$. Показати, що $EK = KD$. **1.15.** $\frac{25}{7}$. *Вказівка:* провести $OK \perp BC$. Нехай $EC = z$. Показати, що



Мал. 129

$BK = KE = 2z$. З ΔDEC знайти $\cos \angle DCE$. Застосувати теорему косинусів до трикутника ABE. **1.16.** $\frac{3}{8}ab$. *Вказівка:* провести $DF \parallel AE$. Довести, що $BM = MD$. Звідси AM — висота ΔABD. **1.17.** 10. *Вказівка:* провести $ML \parallel DT \parallel BQ$ (мал. 129). Показати, що Q — середина AC. Тоді E — точка перетину медіан ΔABC. Провести $EN \parallel BP$. $AP = PN = \frac{2}{3}PQ$ і т.д. **1.18.** $\frac{20}{\sqrt{3}}$. *Вказівка:* як і в попередній задачі, показати, що BQ — медіана. Провести $BK \perp AC$. Встановити, в якому відношенні точка K ділить основу AC. До трикутників ABK і CBK застосувати теорему Піфагора. **1.19.** $\frac{a+b}{b}$. *Вказівка:* довести, що $BC = CD$. Провести $CP \parallel AE$. **1.20.** *Розв'язання:* через вершину C провести пряму, яка паралельна прямій AM і перетинає продовження сторони BA в точці K. Маємо:

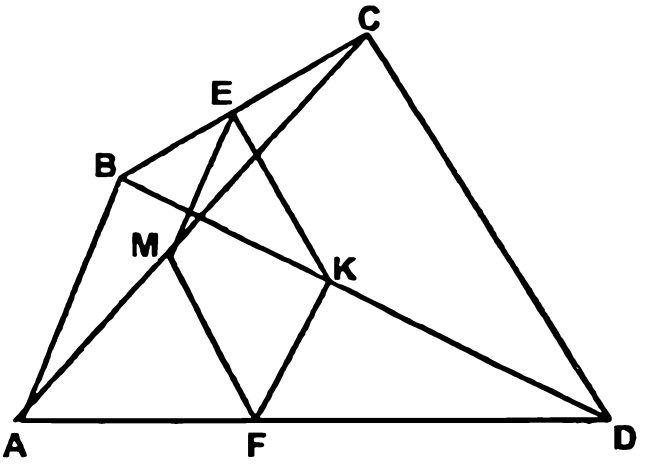
$$\frac{CM}{MB} = \frac{KA}{AB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD \cdot AB}{AB} = \frac{AC^2}{AB^2} = \cos^2 \angle A.$$

§2. 2.6. *Вказівка:* дана трапеція є рівнобічною. **2.7.** *Вказівка:* доведіть, що чотирикутник $EKFM$ — паралелограм (мал. 130). **2.8.** *Вказівка:* доведіть, що висоти трикутників AML і LKD, проведені з вершин M і K відповідно, однакові. Звідси випливає, що $AD \parallel MK$. Аналогічно $BC \parallel MK$ (мал. 131). **2.10.** Доведіть, що трикутник PEK (P, E, K — середини відрізків AC, BC і BD відповідно) рівнобедрений.

2.12. *Вказівка:* розглянемо один з даних шестикутників (мал. 132). Нехай O — середина діагоналі CF. Тоді

$$S_{ABCDEF} = 2S_{MNPO} + 2S_{TOQR}.$$

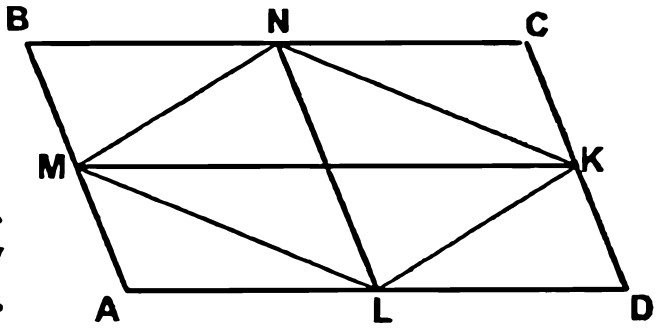
2.13. *Вказівка:* доведіть, що середини сторін чотирикутника $ABMC$ є вершинами ромба.



Мал. 130

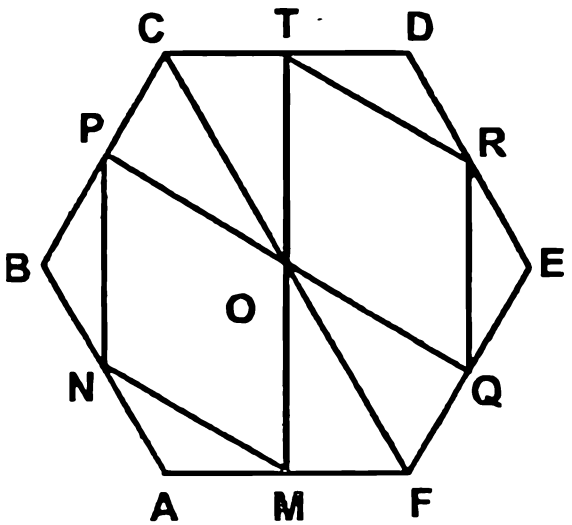
§3. 3.2. $2m$, m, $m\sqrt{3}$. **3.3.** 3:2. *Вказівка:* якщо BB_1 — медіана, а M — точка перетину медіан, то

$$MB_1 = \frac{1}{2}AC.$$

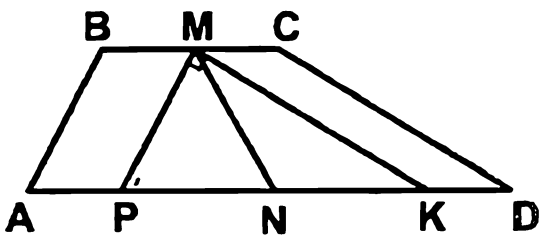


Мал. 131

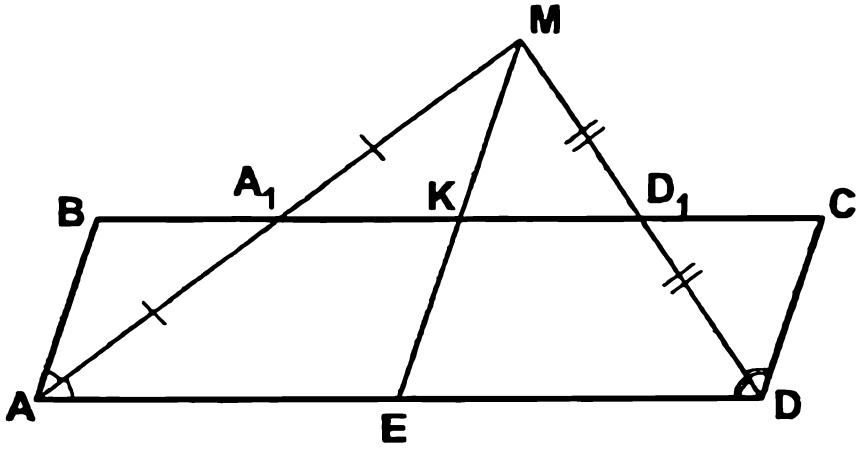
3.4. 26. **3.6.** 15°, 75°. *Вказівка:* проведіть медіану до гіпотенузи. **3.7.** 6,5. **3.8.** $\sqrt{19} : 2\sqrt{7}$. *Вказівка:* шукане відношення дорівнює $AB : BF$. Показати, що $\angle OAD = 30°$. **3.9.** 2; 8; $\frac{15\sqrt{3}}{2}$. *Вказівка:* M і N — середини основ (мал. 133). Проведемо $MP \parallel AB$ і $MK \parallel CD$. Звідси $\angle PMK = 90°$. **3.10.** 8 см, 32 см. *Вказівка:* довести, що $\angle AMD = 90°$ (мал. 134). Провести медіану ME. Довести, що



Мал. 132



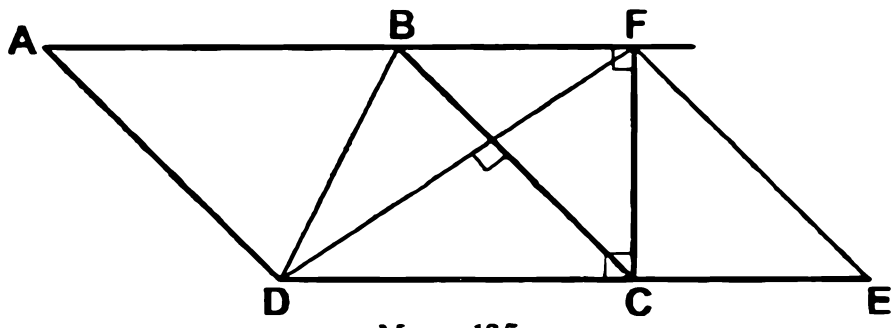
Мал. 133



Мал. 134

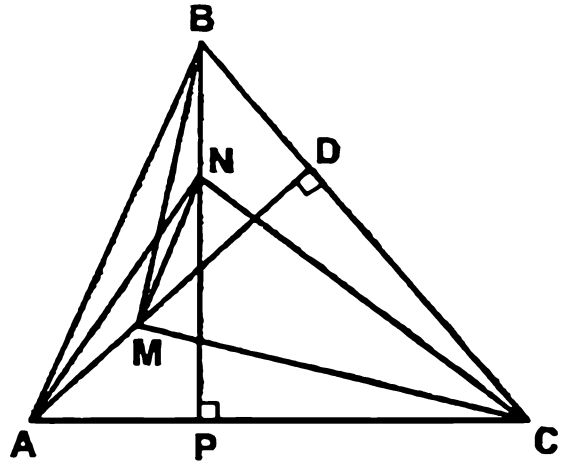
$EK \parallel AB$. **3.11.** *Вказівка:* відкласти на стороні AC відрізок $DC = CM$. Маємо: $DC = CM = BC$. **3.12.** *Вказівка:* показати, що $MB = MP$. **3.13.** $\dfrac{2R \sin 2\alpha}{1 + \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}}$. *Вказівка:* якщо F — середина AB, то $\angle FCA = \angle FAC = \alpha$. Застосувати теорему синусів до трикутника CFA. **3.14.** *Вказівка:* див. задачу **3.3.**

§4. 4.1. Точка D лежить всередині кола. **4.2.** $18\sqrt{13}$, $12\sqrt{13}$. **4.3.** 18; $12\sqrt{2}$. **4.4.** 9. **4.5.** 15; 20. **4.6.** 6; 4,8. **4.7.** 5. *Вказівка:* скористатися формулою $r = \dfrac{a + b - c}{2}$, де a і b — катети, c — гіпотенуза. **4.8.** 25π. **4.9.** 8,64; 15,36. **4.10.** 216. *Вказівка:* скористайтеся тим, що висота рівнобедреної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки, один з яких дорівнює середній лінії трапеції, а другий — піврізниці основ. **4.11.** 54. **4.12.** 2,5. **4.13.** 5 і 13. **4.14.** 192. *Вказівка:* доведіть, що дана трапеція рівнобедрена, її діагоналі перпендикулярні до бічних сторін. **4.15.** 12. **4.16.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **4.17.** $6\sqrt{70}$ і $\dfrac{17}{3}\sqrt{70}$. **4.18.** 10 і 12. **4.19.** $\sqrt{3}$. **4.20.** 30°,



Мал. 135

60°, 90°. *Вказівка:* точка перетину кола з гіпотенузою є основою висоти, яка виходить з прямого кута даного прямокутного трикутника.



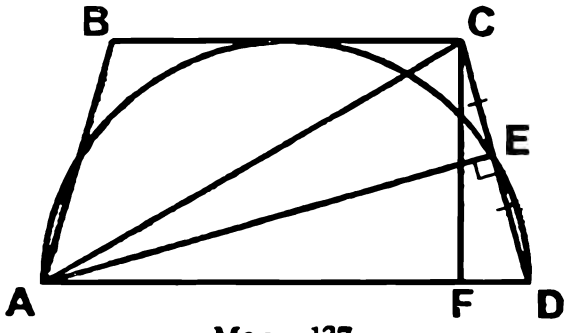
Мал. 136

4.21. $\frac{1}{4}b\sqrt{13}$.

4.22. $\cos \angle A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Вказівка: провести $FE \parallel BC$ (мал. 135). Нехай сторона ромба 1. Тоді $BF = \cos \angle A$, $FC = \sin \angle A$. **4.23.** $7 + 4\sqrt{3}$. *Вказівка:* $MC^2 = BC \cdot DC$, $NC^2 = AC \cdot PC$. $\cos \angle BCA = \frac{DC}{AC} = \frac{PC}{BC}$. Звідси $MC = NC$ (мал. 136).

§5. 5.1. 110° і 70°. **5.5.** *Вказівка:* трикутники AXC і BXD — прямокутні. **5.6.** 120° і 30°. **5.9.** 100°., 40°, 40° **5.10.** $MK = \frac{4}{5}$, $AM = \frac{2}{5}$. *Вказівка:* доведіть, що $\angle AKM = \angle MCB$. **5.13.** 60°, 120°. *Вказівка:* довести, що даний паралелограм — ромб.

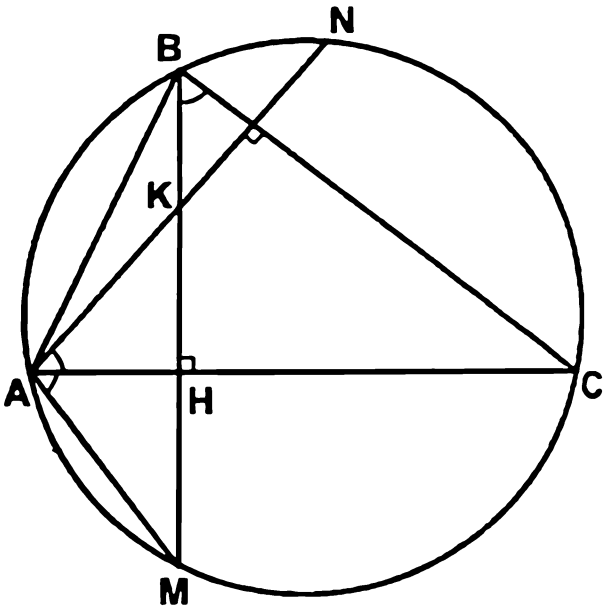


Мал. 137

5.14. *Вказівка:* скористайтеся тим, що сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°. **5.15.** *Вказівка:* доведіть, що $OK \parallel AD$. **5.16.** $2R(\sqrt{3}-1)$. *Вказівка:* $\angle AED = 90°$, $DE = EC$. Звідси ΔACD — рівнобедрений (мал. 137). $AC = 2R$. Аналогічно доводиться, що $BD = 2R$, тобто трапеція рівнобедрена. **5.17.** 165°. *Вказівка:* доведіть, що $\angle AOB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB$. **5.18.** *Вказівка:* нехай O — центр вписаного кола. Доведіть, що точка O лежить всередині трикутника NLM. **5.19.** 15°. *Вказівка:* доведіть, що $\operatorname{tg} \angle NBC = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **5.20.** $\sqrt{2}$. *Вказівка:* нехай E — середина BC.

Доведіть, що $\Delta AEC \backsim \Delta ABC$.

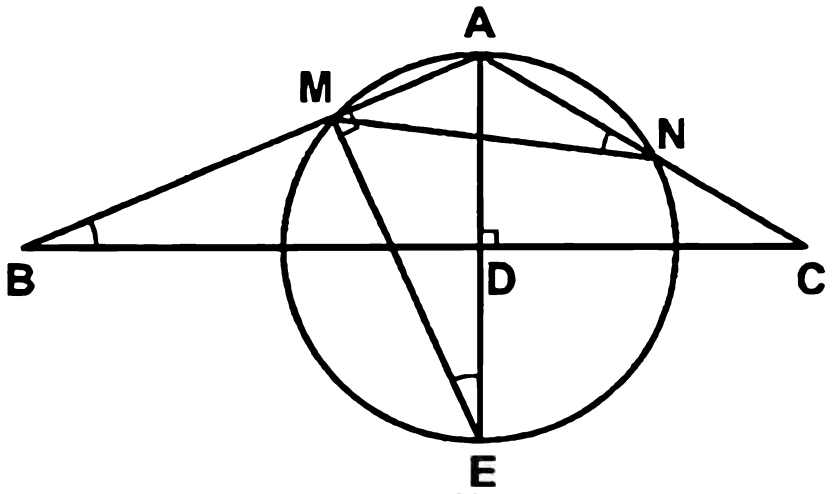
5.21. 45°. **5.22.** $\frac{c^2}{m}$. *Вказівка:* доведіть, що $\Delta ABM \backsim \Delta AKB$. **5.23.** *Вказівка:* доведіть, що $\angle MAH = \angle KAH$ (мал. 138). **5.24.** *Вказівка:* якщо в трикутнику проведено дві висоти, то третю можна побудувати за допомогою однієї лінійки. **5.25.** *Вказівка:* проведіть діаметр через точку A. **5.26.** 20. *Вказівка:* $\angle AEB = 90°$.



Мал. 138

5.28. *Вказівка:* доведіть, що $\angle BOD = \angle DOC$. **5.30.** *Вказівка:* якщо $\angle ACD = \alpha$, то $\angle ACB = 180° - 2\alpha$. **5.31.** *Вказівка:* $\angle AOD = 2\angle ABD$.

5.32. $\frac{m \cdot c}{n}$. *Вказівка:* проведемо діаметр AE (мал. 139). $\angle AME = 90°$. $\angle MEA = \angle ABD = \angle ANM$. $\Delta MAN \backsim \Delta CAB$.



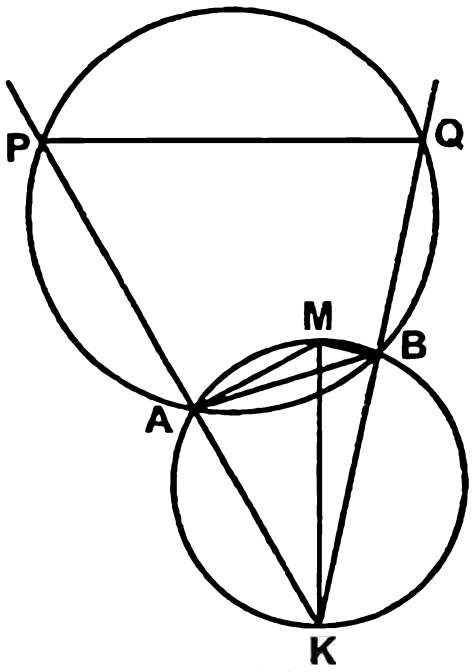
Мал. 139

5.33. *Вказівка:* доведіть: якщо $\angle BAK = \alpha$, то $\angle PQK = \alpha$. Легко показати, що $\angle MKB = 90° - \alpha$ (мал. 140).

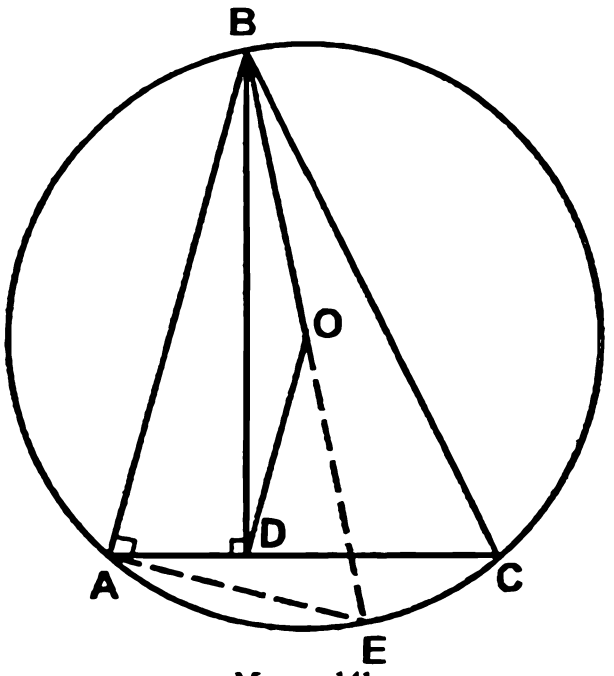
5.34. $6 \cos 12° \cos 18°$. *Вказівка:* $\angle C = 72°$. Проведемо діаметр BE (мал. 141). $\angle BEA = \angle BCA = 72°$. $\angle OBC = 12°$.

$$BD \operatorname{tg} 12° + BD \operatorname{tg} 18° = AC.$$

§6. 6.1. 45°. **6.2.** 71°, 62°, 47°. **6.3.** *Вказівка:* проведіть спільну дотичну до даних кіл через точку дотику. **6.4.** *Вка-*



Мал. 140

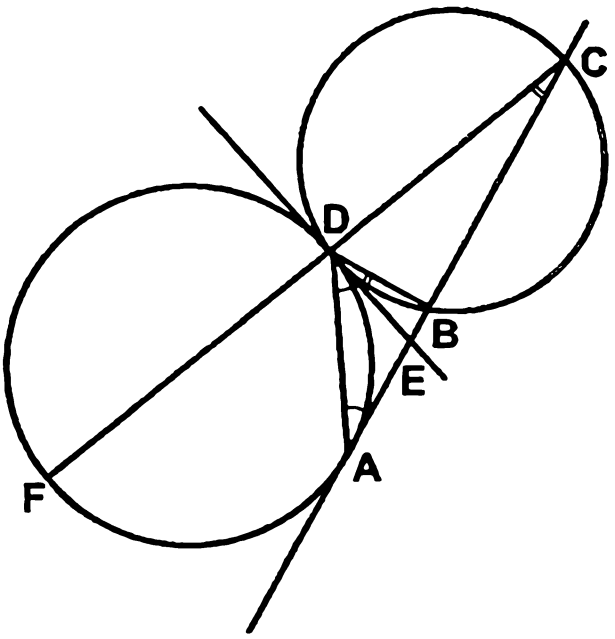


Мал. 141

зівка: доведіть, що

$$\angle PBC = \angle PQA.$$

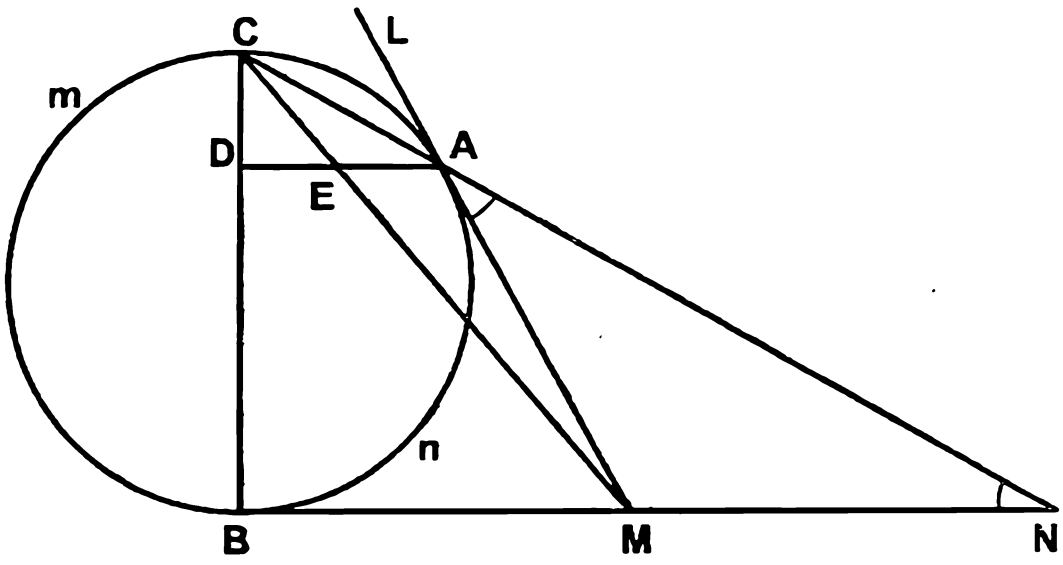
6.6. *Вказівка:* доведіть, що середина дуги AB є центром вписаного кола в трикутник ACB. **6.7.** 2α. **6.11.** *Вказівка:* доведіть, що $\angle ABO = \angle OBC$, де O — центр кола ω_1. **6.13.** *Вказівка:* через точку D проведіть спільну дотичну. Нехай CD перетинає коло в точці F (мал. 142). Доведіть, що DA — бісектриса кута FDB. **6.14.** *Вказівка:* доведіть, що $\Delta AEC \backsim \Delta CDB$, $\Delta ACD \backsim \Delta CFB$.



Мал. 142

6.16. *Вказівка:* доведіть, що $\Delta ABD \backsim \Delta DCB$. **6.17.** 4. *Вказівка:* доведіть, що $\Delta ADE \backsim \Delta ACB$. **6.18.** $\frac{bd}{a}$. *Вказівка:* проведіть дотичну до кола в точці C. Доведіть, що $\Delta EFC \backsim \Delta ABC$. **6.19.** $\frac{R\sqrt{7}}{2}$. **6.20.** 3. **6.22.** *Вказівка:* доведіть, що $\Delta MAK \backsim \Delta BME$, $\Delta MBK \backsim \Delta MAP$. **6.23.** *Вказівка:* доведіть, що

$$\angle NAC = \angle ABC.$$

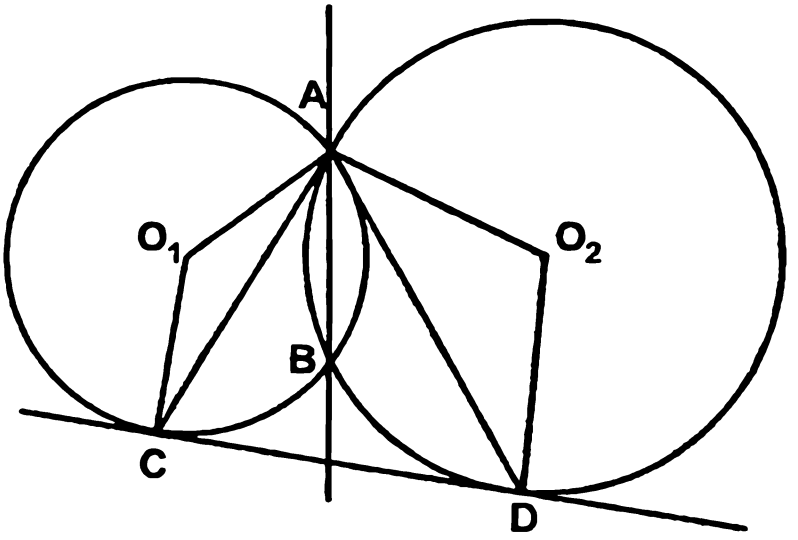


Мал. 143

§7. 7.1. 7°. **7.2.** 150°. **7.3.** 72°. **7.4.** 144°. **7.5.** 70°. **7.6.** 156°. **7.7.** 66° і 42°. **7.11.** *Вказівка:* подовжіть DM до перетину з колом у точці D_1. $\smile AC = \smile AD_1$. **7.13.** *Вказівка:* шуканою точкою є точка дотику. **7.17.** *Вказівка:* AC перетинає BM в точці N (мал. 143). $\angle N = \frac{1}{2} \smile AC = \; = \angle CAL$. Звідси $AM = MN = BM$. $AD \parallel BN$ і т.д.

§8. 8.2. $\frac{8\sqrt{43}}{\sqrt{7}}$. *Вказівка:* радіус кола, описаного навколо трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$), дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника ACD. Знайдіть діагональ AC і $\sin \angle D$. **8.3.** $2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$. **8.4.** $\frac{2}{\pi} \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha + \beta)$. **8.5.** $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. **8.6.** 10,625. **8.7.** $2\sqrt{\frac{34}{15}}$. *Вказівка:* $NP = PQ$. Застосуйте теорему косинусів до трикутників MNP і MPQ і знайдіть $\cos \angle PMQ$. **8.8.** $R\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.9.** *Вказівка:* якщо H — ортоцентр, то $\angle AHC = 180° - \angle B$. **8.10.** 83°. *Вказівка:* доведіть, що $\sin \angle B = \sin \angle A_1FC_1$. **8.11.** 2. **8.12.** $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. **8.13.** $\frac{25}{4}$. *Вказівка:* нехай O — центр кола, E — точка дотику зі стороною AB. Покажіть, що $BE = 4$. Знайдіть $\sin \angle A$. **8.15.** $\frac{R^2}{a}$. **8.16.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. *Вказівка:* $\Delta AND \sim \Delta BNC$. **8.17.** $2R^2 \sin^3\alpha$. *Вказівка:* доведіть, що $\angle CAD = \alpha / 2$.

8.18. $\frac{9\sqrt{3}}{52}$.

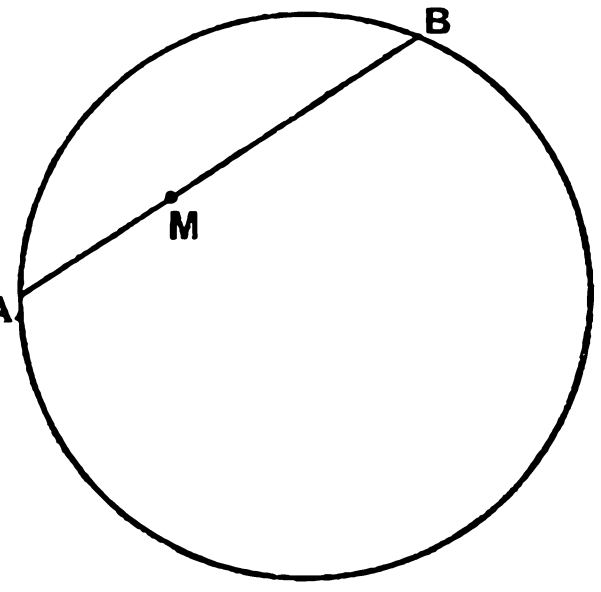


Мал. 144

Вказівка: Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений. **8.19.** $\frac{5}{2}$. *Вказівка:* доведіть, що DC — діаметр кола. **8.20.** Шукана точка — це основа висоти трикутника, проведеної з вершини B. *Вказівка:* через вершину B і основи перпендикулярів проведіть коло. **8.21.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **8.22.** $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$. *Вказівка:* сума градусних мір дуг, які стягують хорди a і b, дорівнює 2α. Тоді якщо хорди відкласти від однієї точки кола, то кут між ними буде $180° - \alpha$. **8.23.** $\sqrt{Rr}$. *Вказівка:* $\angle CO_1A = 2\angle ACD$ і $\angle AO_2D = 2\angle ADC$ (мал. 144). **8.24.** AM — це діаметр. *Вказівка:* точки A, N, M, K лежать на одному колі.

§9. 9.1. $8\sqrt{13}$ см. **9.2.** $\frac{a^2 + 4m^2}{4m}$. **9.3.** $\frac{a}{5}$. **9.4.** 6 см і 12 см. **9.5.** 13 см. **9.6.** 30 см і 33 см. **9.7.** 42 см і 66 см. **9.8.** Ні. *Вказівка:* скористайтеся методом від супротивного.

9.9. *Вказівка:* скористайтеся таким твердженням: кінці відрізків AB і CD, які перетинаються в точці M, належать до одного кола, якщо $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Сформульований факт найлегше довести, використовуючи метод від супротивного.



Мал. 145

9.10. *Вказівка:* нехай $AM = x$, $MB = y$ і $\sqrt{xy} = a$ (мал. 145). Скориставшись нерівністю між середнім

арифметичним і середнім геометричним, одержимо

$$a = \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}, \text{ або}$$

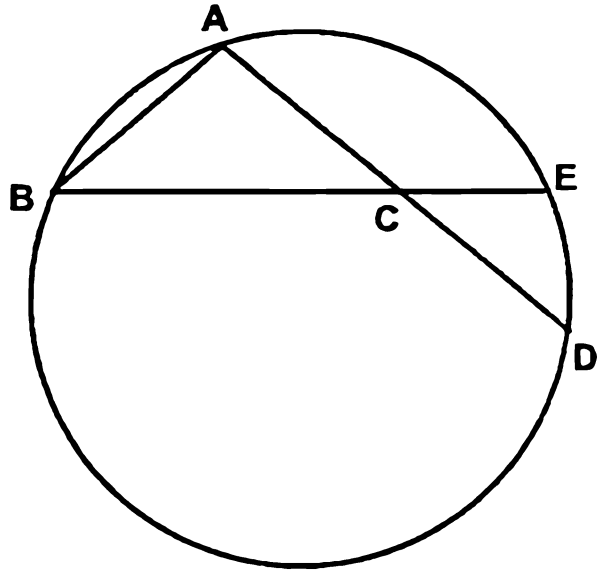
$$x + y \geqslant 2a.$$

Очевидно, що рівність можлива лише при умові $x = y$.

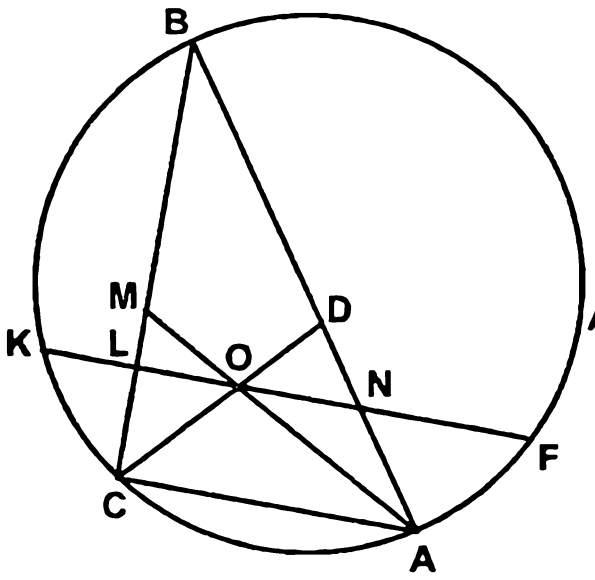
9.11. $\frac{\pi}{4}$, arctg 3, $\frac{3\pi}{4}$ – arctg 3.

Вказівка: доведіть, що $HD = DD_1$ і $HE = EE_1$.

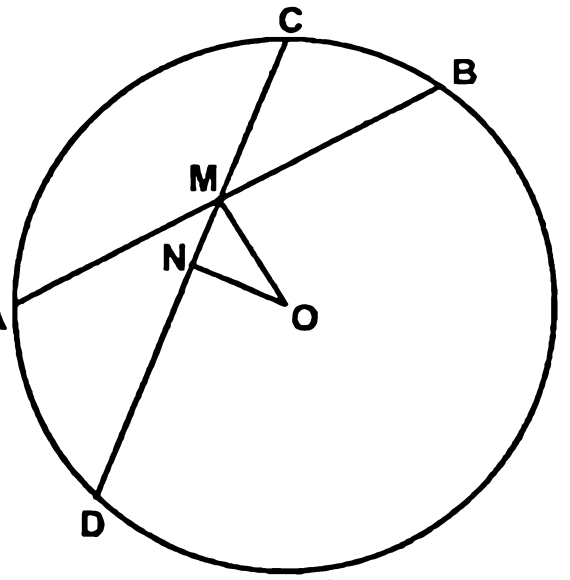
9.12. $\sqrt{5}$. *Вказівка:* нескладно одержати $BC = 2\sqrt{2}$ (мал. 146). Але тоді



Мал. 146



Мал. 147



Мал. 148

$AB^2 + AC^2 = BC^2$, звідси $\angle BAC = 90°$. **9.13.** 30°, 30°, 120°. **9.14.** 32 см і 24 см. **9.15.** 42 см, 42 см, 24 см. **9.16.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. *Вказівка:* позначимо $CD = DB = x$, $AD = y$. Тоді $DE = 6 - y$, $AB = 6 - 2y$. Одержуємо $x^2 = y(6 - y)$. Друге рівняння можна одержати, застосувавши теорему косинусів у трикутнику DAB. **9.17.** 27 см і 28,5 см. *Вказівка:* доведіть, що трикутники OLC і ONA — рівнобедрені (мал. 147). **9.18.** $\arcsin\frac{5}{9}$. *Вказівка:* доведіть, що $\angle AMD = \angle MON$ (мал. 148), де $ON \perp DC$. **9.19.** *Вказівка:*

$KF \cdot FT = PF \cdot FM$ і

$DF \cdot FE = PF \cdot FM$

(мал. 149).

Одержимо $KF \cdot FT = DF \cdot FE$. Тоді

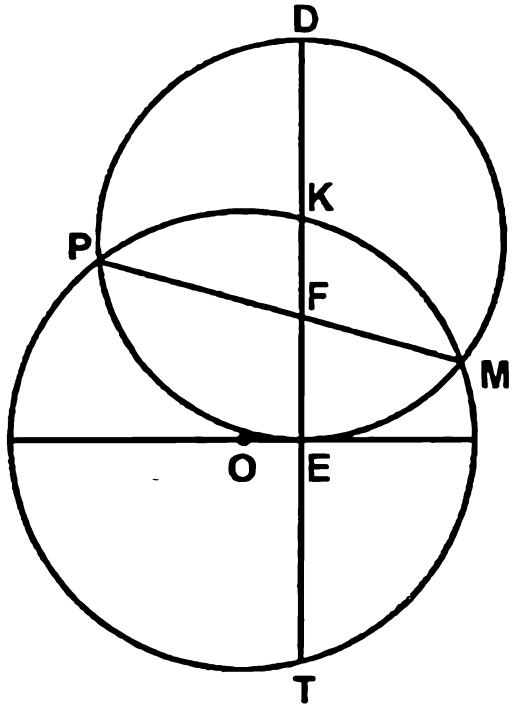
$$(KE - FE)(KE + FE) =$$

$$= DF \cdot FE, \text{ або}$$

$$KE^2 = FE^2 + DF \cdot FE =$$

$$= FE\,(FE + DF) = FE \cdot 2KE.$$

Звідси $FE = \frac{1}{2} KE$.



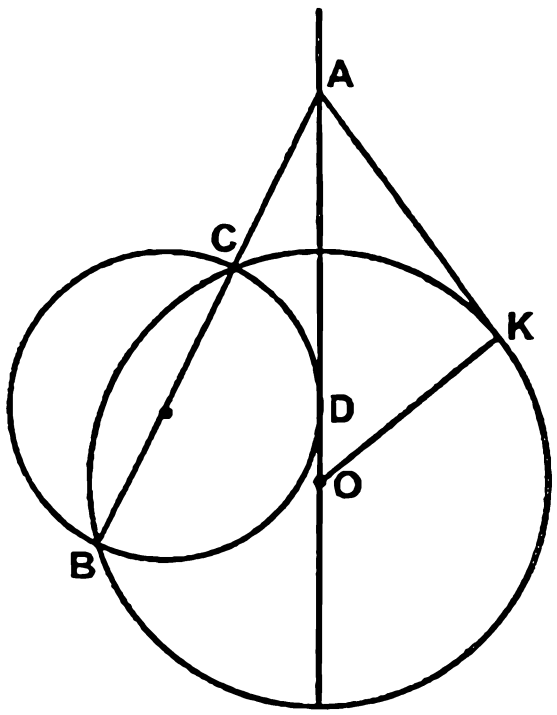
Мал. 149

§10. 10.2. *Вказівка:* скористайтеся другою ознакою подібності трикутників. **10.3.** 13 см. **10.4.** 6 см. **10.5.** 12. **10.6.** $\frac{a}{2}$. **10.7.** $\sqrt{a^2 - R^2}$. *Вказівка:* з точки A проведіть дотичну AK (мал. 150). Доведіть, що $AD = AK$.

10.8. $\frac{b^3}{a^2 + b^2}$, $\frac{a^3}{a^2 + b^2}$.

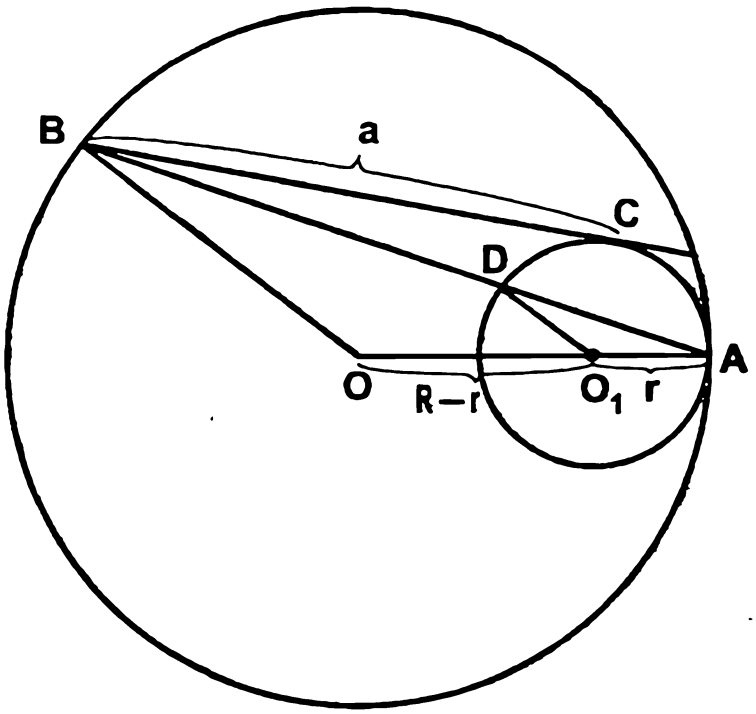
10.9. 90°. *Вказівка:* знайдіть сторони AB і AC.

10.10. 11. **10.11.** 8 і 10. **10.12.** $a\sqrt{1 + \frac{r}{R}}$. *Вказівка:* нехай AB перетинає менше коло в точці K. $\Delta OBA \sim \Delta AKO_1$, де O і O_1 — центри відповідно більшого і меншого кіл. **10.13.** *Вказівка:* $\Delta ADO_1 \sim \Delta ABO$ (мал. 151). **10.14.** $R\,(\sqrt{\sin^2\beta + \operatorname{ctg}^2\alpha} - \sin\beta)$. *Вказівка:* виразіть довжини відрізків AC і BM через R і задані кути.



Мал. 150

§11. 11.6. 1:6. **11.7.** 2:3. *Вказівка:* основи трапеції відносяться як 3:7. **11.8.** 59:53. *Вказівка:* у трапецій $KBCM$ і $KMDA$ спільна висота, отже, їх площі відносяться як півсуми (суми) основ. **11.9.** *Вказівка:* скористайтесь тим, що якщо $\frac{a}{b} = k$ і $\frac{c}{d} = k$, то



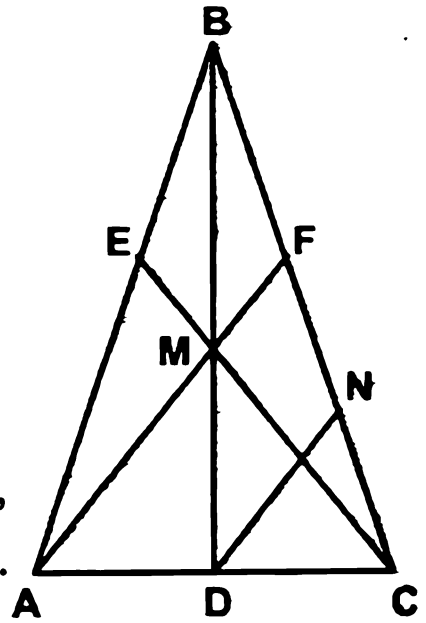
Мал. 151

$\frac{a-c}{b-d} = k$. **11.12.** $\frac{k(m+1)}{m}$. *Вказівка:* $S_{BCD} : S_{ABD} = k$.

11.13. $S_{AMD} = S_{DMC} = \frac{1}{4}$,

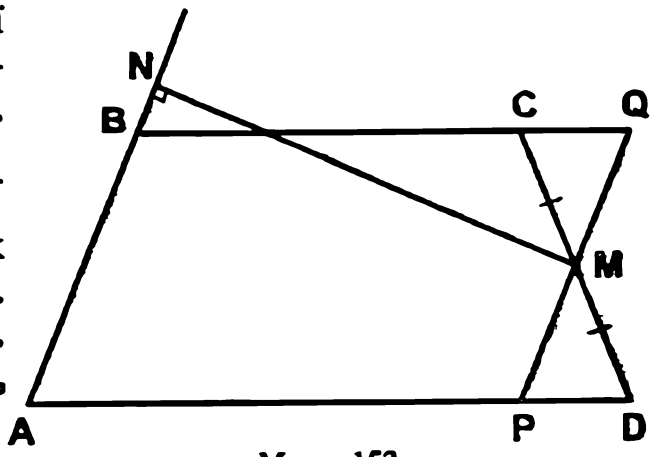
$$S_{AEM} = S_{CMF} = \frac{1}{6},\ S_{EBM} = S_{MBF} = \frac{1}{12}$$

(мал. 152).



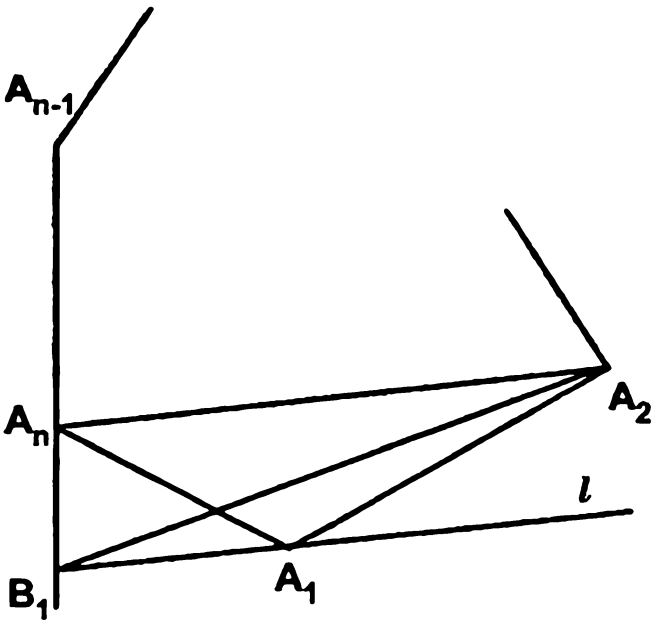
Мал. 152

Вказівка: проведіть $DN \parallel AF$. Доведіть, що $BF : FC = 1 : 2$. **11.14.** $\frac{1}{6}S$. **11.15.** ab. *Вказівка:* проведіть $PQ \parallel AB$ (мал. 153). Площа трапеції $ABCD$ дорівнює площі паралелограма $ABQP$. **11.16.** $\frac{9\sqrt{14}}{7}$. **11.17.** $\frac{a+b}{b}$. *Вказівка:* доведіть, що трикутник BCD — рівнобедрений. Проведіть $CP \parallel AE$. **11.18.** 7. *Вказівка:* проведіть відрізки MB, PC, KA.



Мал. 153

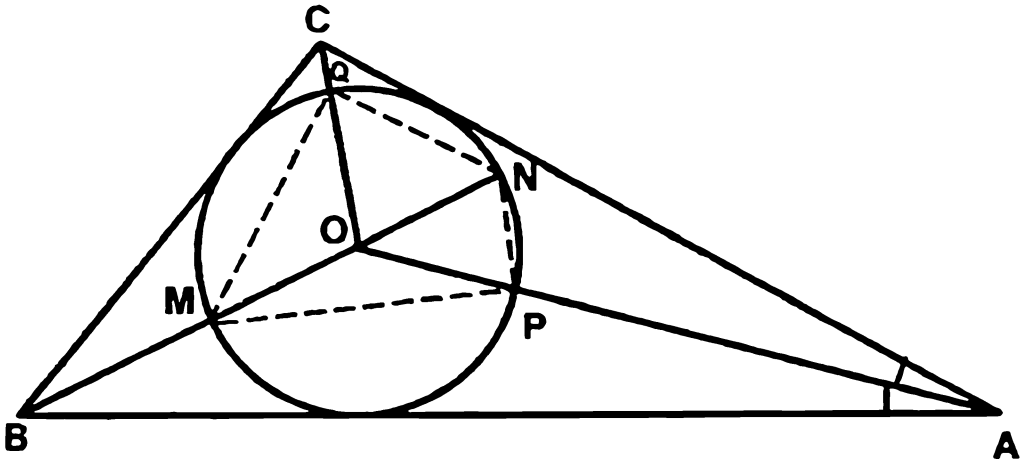
11.19. $5S$. *Вказівка:* проведіть відрізки A_1B, B_1C, C_1D, D_1A. **11.20.** *Вказівка:* проведіть діагоналі чотирикутника $ABCD$. **11.21.** $\frac{S}{12}, \frac{S}{2}, \frac{5S}{12}$. *Вказівка:* проведіть відрізок DK, де K — точка перетину прямої l зі стороною BC. **11.22.** $\frac{nq}{(m+n)(p+q+r)}$. **11.23.** 9. **11.25.** *Вказівка:* проведемо $l \parallel A_2A_n$ (мал. 154). $B_1A_2 \dots A_{n-1}$ — шуканий $(n-1)$-кутник. **11.26.** $\frac{\cos(\gamma/2)}{\cos(\alpha/2)}$. *Вказівка:* доведіть таку лему: якщо в трикутнику ABC O — точка перетину бісектрис, то $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC$. Маємо:



Мал. 154

$$\angle MOP = 90° + \frac{\gamma}{2} \text{ і } \angle MNP = 45° + \frac{\gamma}{4} \text{ (мал. 155).}$$

Аналогічно $\angle MOQ = 45° + \frac{\alpha}{4}$. $\frac{S_{MPN}}{S_{MQN}} = \frac{MP \cdot PN}{MQ \cdot QN}$ і т.д.



Мал. 155

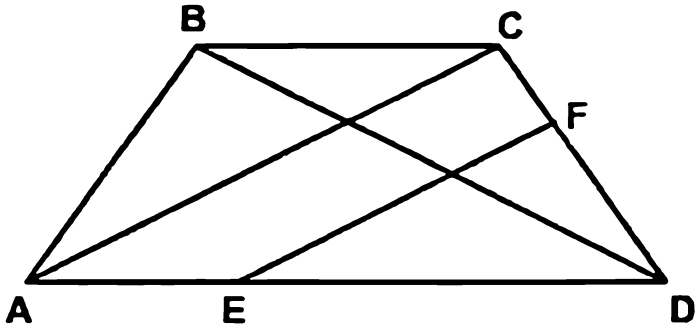
§12. 12.1. 300 см^2. **12.2.** $10\sqrt{2}$ см. **12.3.** 32. **12.5.** 3. **12.6.** 20. **12.7.** 20 і 30. **12.8.** $1 : (\sqrt{2}-1) : (\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **12.10.** *Вказівка:* доведіть, що $\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}} = \frac{AD}{EF}$. **12.12.** $mn : m^2 : mn : n^2$. *Вказівка:*

нехай O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Виразіть площі трикутників ABO, OCD, BOC через площу трикутника AOD. **12.13.** $\frac{(m+n)(3m+n)}{(2m+n)^2} \cdot a$. *Вказівка:* покажіть, що трикутники, утворені в результаті ділення, подібні вихідному трикутнику. **12.14.** 45. *Вказівка:* $\Delta ABC \backsim \Delta ABD$. **12.15.** $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. **12.16.** $4(1-\alpha)$. *Вказівка:*

$$CD = \frac{BC - BE}{2},$$

$$\alpha = \frac{BC - BE}{2BC},$$

$$\frac{BE}{BC} = 1 - 2\alpha.$$



Мал. 156

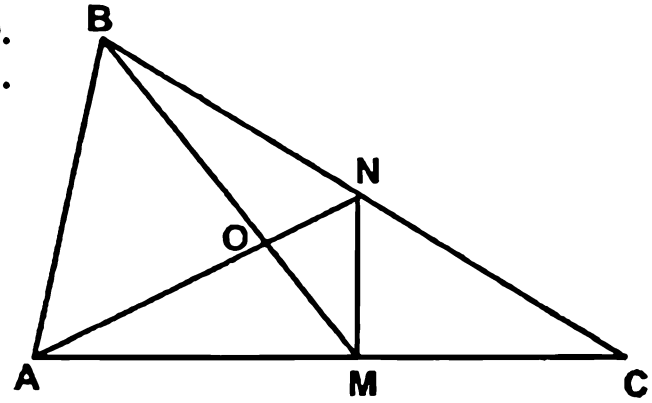
12.18. *Вказівка:* доведіть, що площа чотирикутника $M_1M_2M_3M_4$ в чотири рази більша за площу чотирикутника $T_1T_2T_3T_4$. **12.19.** $2\sqrt{PQ}$. **12.20.** 3:1 або 1:3. *Вказівка:* нехай $BK = x$, $KC = y$. Тоді $S_{DKC} : S_{ABC} = y^2 : (x+y)^2$, $S_{BKD} : S_{DKC} = x : y$. **12.21.** 30°. *Вказівка:* $\frac{\frac{1}{2} CD \cdot CM \cdot \sin C}{\frac{1}{2} CB \cdot AC \cdot \sin C} = \frac{1}{4}$. **12.22.** 1:3. *Вказівка:* $S_{BHC} : S_{MNC} = \left(\frac{MN}{BH}\right)^2 = \frac{1}{4}$. $AH : HC = S_{ABH} : S_{BHC}$. **12.23.** 5:1 або 1:5. *Вказівка:* $S_{ABC} = (\sqrt{S_{EBM}} + \sqrt{S_{FMC}})^2$. $\frac{\sqrt{S_{EBM}}}{\sqrt{S_{FMC}}} = \frac{BM}{MC}$. **12.24.** $2 \arcsin \sqrt{a}$. *Вказівка:* $S_{KBL} : S_{ABC} = KB^2 : AB^2 = BE^2 : AB^2 = \sin^2 \angle BAE$. **12.25.** $AE:ED = \frac{2\sqrt{6}-3}{3}$ (мал. 156). *Вказівка:* $S_{ACD} : S_{ABC} = AD : BC = 2$, $S_{ABCD} = \frac{3}{2} \times S_{ACD}$, $S_{EFD} : S_{ACD} = \frac{3}{8} = \frac{ED^2}{AD^2}$. **12.26.** $\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + 2ab - b^2}$. *Вказівка:* $MC : AC = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

§13. 13.1. 90. **13.2.** 120. **13.3.** 1/3, 2/3, 4/3, 2/3. **13.4.** $\frac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$.

Вказівка: доведіть, що

$$\frac{S_{ABM}}{S_{MBC}}=\frac{S_{ANM}}{S_{MNC}}=\frac{AM}{MC}$$

(мал. 157).

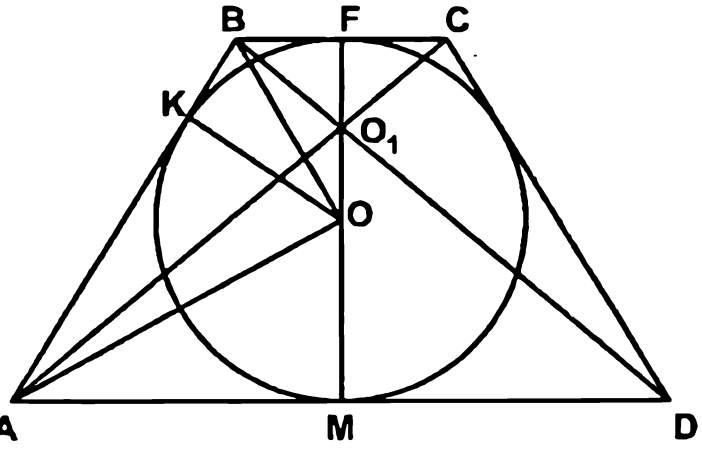


Мал. 157

Тоді

$$\frac{S_1+S_2}{S_4+S_3+x}=\frac{S_1+S_4}{x},$$

де S_4 і x — площі трикутників NOM і CMN відповідно. **13.5.** *Вказівка:* помножте почленно рівність $S_1S_3=S_2S_4$ і $S_1S_3=S_1S_3$. **13.6.** 25. *Вказівка:* розв'язок задачі зводиться до дослідження функції $S(x)=13+x+\frac{36}{x}$.



Мал. 158

13.7. 60° і 120°. *Вказівка:* доведіть, що $AB=\frac{AD+BC}{2}$ і $S_{ABCD}=4S_{AOB}$ (мал. 158). **13.8.** $\frac{\sqrt{3}}{9}$. *Вказівка:* доведіть, що

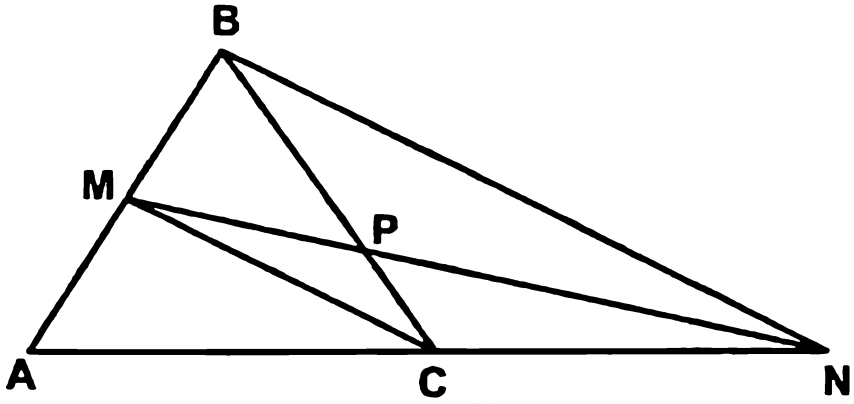
$$\frac{S_{KCE}}{S_{DCE}}=\frac{S_{AKE}}{S_{ADE}}=\frac{KE}{ED}.$$

§14. 14.3. *Вказівка:* розглянувши рівність

$$S_1+S_2=S_3+S_4 \text{ і } S_1+S_4=S_2+S_3,$$

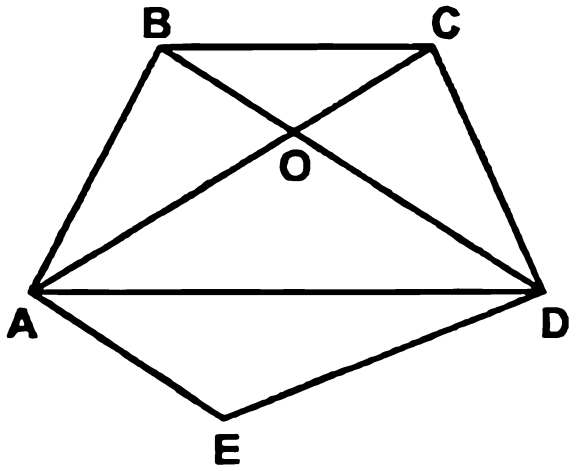
доведіть, що $S_1=S_3$ і $S_2=S_4$. **14.4.** $\frac{2a}{3}$, $\frac{3a}{4}$. *Вказівка:* доведіть, що $MC \parallel BN$ (мал. 159) і скористайтеся подібністю трикутників MPC і NPB. **14.5.** 3. *Вказівка:* якщо $S_{BEC}=S$, то $S_{AED}=\frac{1}{S}$. Тоді $2+S+\frac{1}{S}\leqslant 4$, звідки $S=1$. Тепер нескладно показати, що $ABCD$ — паралелограм. **14.6.** *Вказівка:* $S_{ABCD}=S_{AOD}+S_{COB}+2\sqrt{S_{AOD}S_{COB}}$, але

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{COB} + S_{AOB} + S_{COD}.$$



Мал. 159

Тепер, скориставшись $S_{AOD}\,S_{COB} = S_{AOB}\,S_{COD}$, покажіть, що $S_{AOB} = S_{COD}$. **14.7.** $\sqrt{7}$. **14.8.** *Вказівка:* скористайтеся такою властивістю: точки перетину бічних сторін, точки перетину діагоналей, а також середини основ трапеції належать одній прямій. **14.9.**

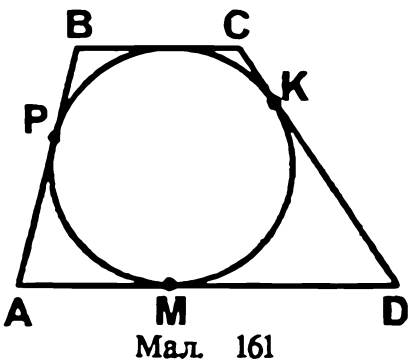


Мал. 160

$\frac{5+\sqrt{5}}{2}S$. *Вказівка:* нехай $S_{BOC} = S_1$ (мал. 160). Оскільки $ABCD$ — трапеція, то

$$S_{AOB} = S_{DOC} = S - S_1.$$

Тоді $(S - S_1)^2 = SS_1$.



Мал. 161

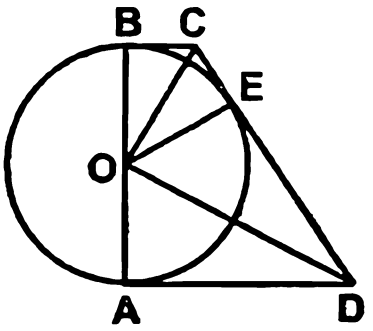
§15. 15.1. *Вказівка:* всі чотири бісектриси попарно перпендикулярні. **15.2.** 21, 15, 7, 13, 168. *Вказівка:* $KD = MD = 9$, $AP = AM = 12$ (мал. 161). Окрім того, $OK^2 = CK \cdot KD$ і $OP^2 = AP \cdot PB$. **15.3.** *Вказівка:* покажіть, що $\angle BNA = 45°$. **15.4.** *Вказівка:* покажіть, що $\angle ECK = \angle EHK = 45°$ (тут $AC > BC$). **15.5.** *Вказівка:* доведіть, що $\angle AFE = 60°$ (AF — бісектриса внутрішнього кута при вершині A). **15.6.** 6. *Вказівка:* доведіть, що $AK = AB$ і $DK = DC$. Окрім того, $\angle BKC = 90°$, отже, BC — діаметр кола, описаного

навколо трикутника BKC. **15.7.** $\frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **15.8.** h^2.

Вказівка:

$BC = CE$, $AD = DE$ (мал. 162).

$$OE = \frac{1}{2}AB = h.\ \angle COD = 90°.$$

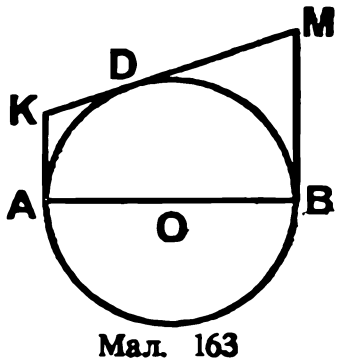


Мал. 162

Тоді $OE^2 = CE \cdot ED$. **15.9.** *Вказівка:*

$$AK \cdot BM = KD \cdot DM = OD^2 = R^2$$

(мал. 163).



Мал. 163

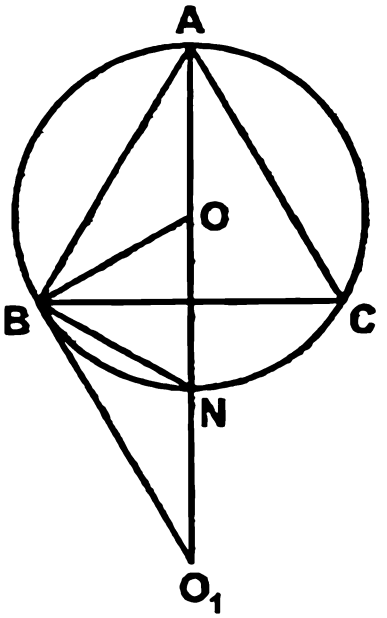
15.10. *Вказівка:* доведіть, що в прямокутному трикутнику OBQ $NB = NO$ (мал. 164). **15.11.** $\sqrt{2}$.

15.12. *Вказівка:*

$$OK = \frac{2S_{AOB}}{AB} = \frac{OA \cdot OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}},$$

$$OM = \frac{2S_{COD}}{CD} = \frac{OC \cdot OD}{\sqrt{OC^2 + OD^2}}$$

(мал. 165).



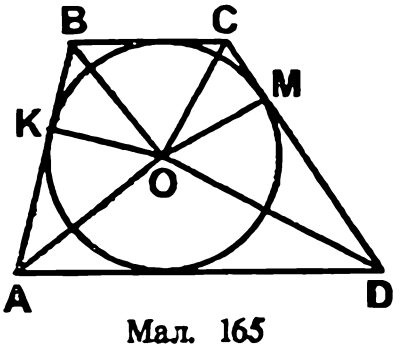
Мал. 164

15.13. *Вказівка:* доведіть, що точки M і N належать середній лінії трапеції. **15.14.** $\frac{6}{7}$. *Вказівка:* нехай $AK = a$, $NP = x$, $PQ = 2x$, $MN = 7x$ (мал. 166). MO і OQ — бісектриси кутів QMD і MQC. Звідси

$$\angle MOQ = 90°$$ і

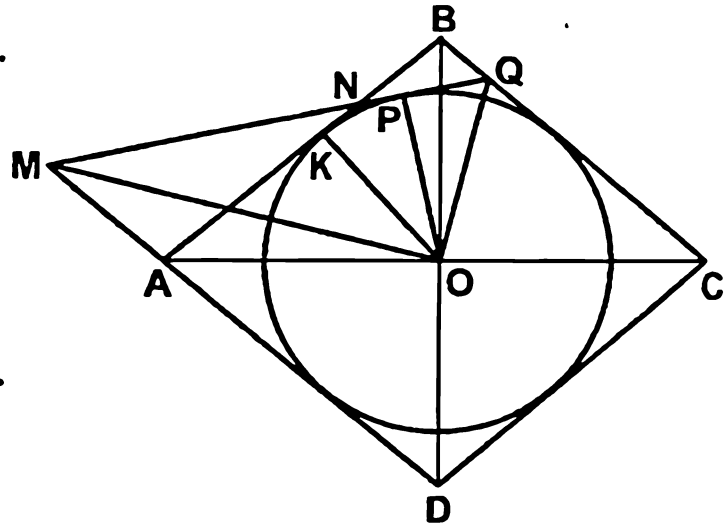
$$OP = \sqrt{MP \cdot PQ} = 4x.$$

З подібності трикутників NBQ і AMN одержуємо:



Мал. 165

$NB = \frac{3}{7}$, $AN = \frac{3(a+x)}{7}$.



Мал. 166

Окрім того,

$$OK^2 = AK \cdot KB.$$

Одержуємо

$$a\left(x + \frac{3(a+x)}{7}\right) = 16x^2.$$

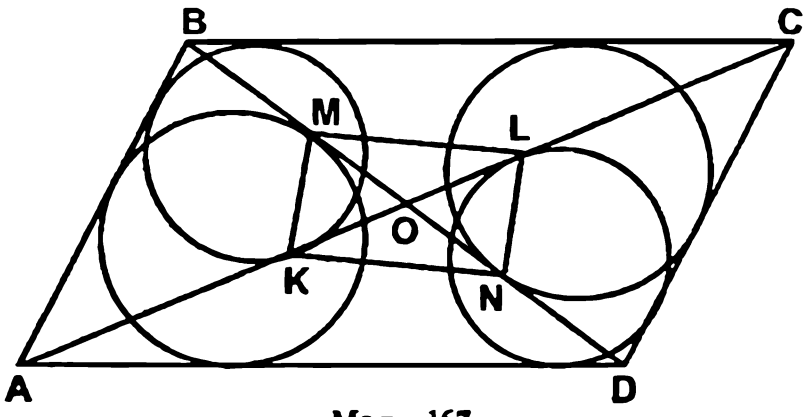
Звідси $a = \frac{14x}{3}$,

$$\operatorname{tg} \angle BAO = \frac{OK}{AK} = \frac{6}{7}.$$

§16. 16.2. $\frac{1}{2}(p-a)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **16.4.** $3\sqrt{2}$. **16.5.** 30°, 60°, 90°. **16.6.** $a\sqrt{\frac{13-4\sqrt{7}}{2}}$. *Вказівка:* знайдіть AB за теоремою косинусів. Нехай M і N — точки дотику вписаного кола відповідно зі сторонами BC і AC. $CN = p - AB$. Знайдіть BN за теоремою косинусів. $\angle BMN = 150°$. **16.7.** *Вказівка:* якщо K — точка дотику з гіпотенузою AB, то $AK = b - r$, $BC = a - r$. $AK \cdot KB = (a-r)(b-r)$ і т.дін **16.8.** *Вказівка:* маємо $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-b)(p-a)$. **16.9.** *Вказівка:* K, M, L, N — точки дотику (мал. 167). Маємо:

$$OK = AO - AK = \frac{AC}{2} - \left(\frac{AB + BC + AC}{2} - BC\right) = \frac{BC - AB}{2}.$$

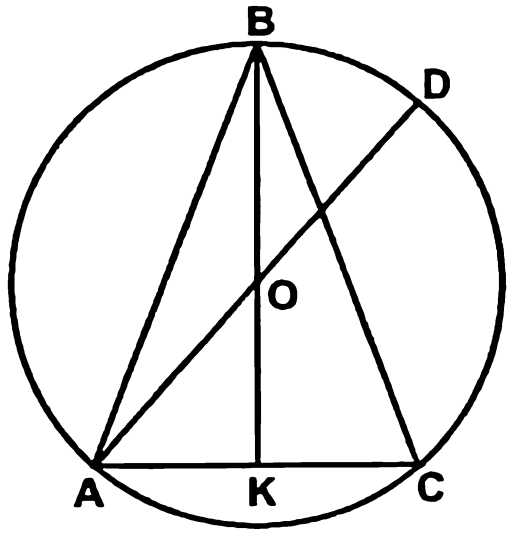
Аналогічно обчислюється довжина кожного з відрізків OM, OL, ON. **16.10.** *Вказівка:* нехай K_1 і K_2 — точки дотику



Мал. 167

вписаних кіл з діагоналлю AC. $K_1K_2 = |AC - (AK_1 + CK_2)|$. Залишилося показати, що $K_1K_2 = 0$. **16.11.** $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$. **16.12.** $\frac{|a-b|}{2}$. **16.13.** 6, 8, 10. **16.14.** 16. **16.15.** 4 або 6. *Вказівка:* скористайтесь тим, що периметри подібних трикутників відносяться як відповідні сторони. **16.16.** 18. **16.17.** $\frac{2mn}{m+2n}$ і $\frac{n(m+n)}{m+2n}$. **16.19.** $\frac{1}{4}p$. *Вказівка:* нехай довжина сторони, паралельної дотичній, дорівнює a. Покажіть, що довжина відрізка дотичної дорівнює $\frac{a}{p}(p-a)$. Функцію $f(x) = \frac{x}{p}(p-x)$ дослідіть на найбільше значення. **16.20.** 3. *Вказівка:* нехай D — точка дотику вписаного кола зі стороною AB. $BD = \sqrt{\frac{1+\cos B}{1-\cos B}}$.

§17. 17.1. $\frac{m(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $\frac{n(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}}$. **17.2.** 12. **17.3.** 42 і 56. **17.4.** 9, $9\sqrt{3}$, 18. **17.5.** 6. *Вказівка:* знайдіть відрізки, на які бісектриса ділить бічну сторону трикутника. Визначте косинус кута при основі трикутника. **17.6.** $9\sqrt{5}$, $8\sqrt{10}$. **17.7.** 9. **17.9.** $\frac{7R^2\sqrt{35}}{20}$. *Вказівка:* $AB : BC = 3:4$. **17.10.** $\frac{2k}{1+k}$. *Вказівка:* проведемо висоту BK (мал. 168). BO — бісектриса трикутника ABE. Маємо:



Мал. 168

$$\frac{CE}{BC} = \frac{BC - BE}{BC} =$$

$$= 1 - \frac{BE}{AB} = 1 - \frac{OE}{AO} \text{ і т.д.}$$

17.11. *Вказівка:* проведіть бісектрису CD. $\Delta ABC \backsim \Delta ADC$. Скористайтеся також теоремою про бісектрису. **17.12.** 32. *Вказівка:* $AC = AE$, $AC : AB = 3 : 5$. **17.13.** 4. *Вказівка:* проведіть бісектрису зовнішнього кута при вершині B. Вона

перетинає пряму AC в точці K. DK — діаметр шуканого кола. Покажіть, що

$$AK : KC = AB : BC.$$

17.14. $\frac{7a^2\sqrt{35}}{48}$. *Вказівка:*

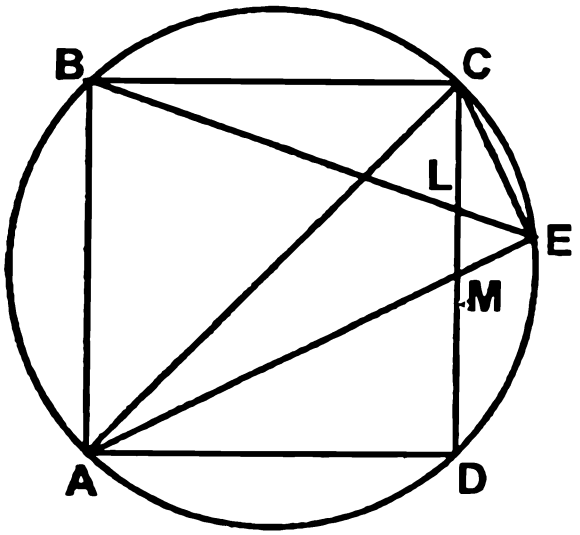
$$AB : AC = 3 : 4.$$

17.15. 1:2. *Вказівка:*

$$\angle CEL = \angle LEM = 45°,$$

$$\operatorname{tg} \angle MCE = \operatorname{tg} \angle MAD = 2$$

(мал. 169).



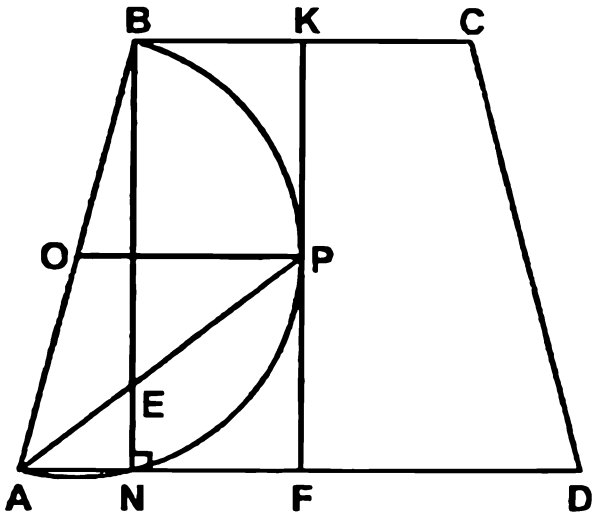
Мал. 169

17.16. 1 і 2. *Вказівка:* $\Delta AMD \backsim \Delta CMB$ з коефіцієнтом подібності 2, тобто $MB : MD = 1 : 2$. **17.17.** 1:4. *Вказівка:* $S_{AFD} : S_{ABD} =$

$$= \frac{AF}{AB} = \frac{AF}{AF + BF} =$$

$$= \frac{1}{1 + BF/AF}.$$

Аналогічно знайдіть відношення $S_{ABD} : S_{ABC}$. **17.18.** $\sqrt{13}$, $2\sqrt{13}$, $3\sqrt{5}$. *Вказівка:* ΔABD — рівнобедрений. Проведіть $DK \parallel BE$. **17.19.** *Вказівка:* проведемо BN (мал. 170), $BN \perp AD$, $\angle EAN = \angle EAB$. **17.20.** 1:2. *Вказівка:* нехай $S_{ABC} = 1$. $S_{AOD} = 3x$, $S_{BOF} = 8x$,



Мал. 170

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} - 3x, \quad S_{DOFC} = \frac{1}{2} - 8x. \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{FC} = \frac{S_{ABF}}{S_{AFC}} = \frac{\frac{1}{2} + 5x}{\frac{1}{2} - 5x},$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \frac{\frac{1}{2} - 3x}{3x}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{2AD} = \frac{\frac{1}{2} - 3x}{6x}.$$

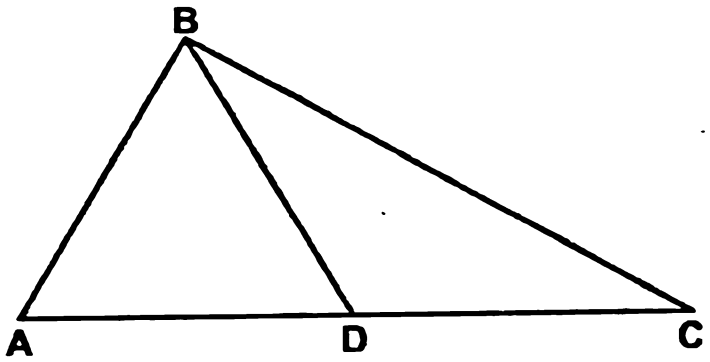
17.21. 1:12. *Вказівка:* PA — бісектриса кута BPC. Проведіть

$NM \parallel AP$. **17.22.** $\frac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}$. *Вказівка:* проведемо висоту BK. Нехай $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$. $\cos 2\alpha = \frac{S_2}{2S_1}$,

$S_1 + S_2 = AK^2 \operatorname{tg} 2\alpha$,

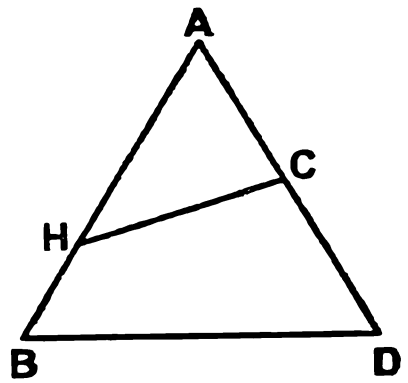
$AC = 2\sqrt{\frac{S_1+S_2}{\operatorname{tg} 2\alpha}}$.

§18. 18.1. $\frac{R}{2}$.



Мал. 171

Вказівка: доведіть, що точки C, B_1, H, A лежать на одному колі. **18.2.** 6. *Вказівка:* треба зауважити, що $\frac{BC}{AC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ (мал. 171), $\frac{DC}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, отже, $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$, звідси випливає подібність трикутників BCA і DCB. **18.3.** *Вказівка:* з умови випливає, що $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AH}$, отже, трикутники ABD і ACH подібні (мал. 172). Тоді $\angle ACH = \angle ABD$, звідки $\angle ABD + \angle HCD = 180°$. **18.4.** *Вказівка:* скористайтеся ключовою задачею параграфа. **18.5.** 30°. **18.6.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **18.7.** $\frac{768}{25}$.



Мал. 172

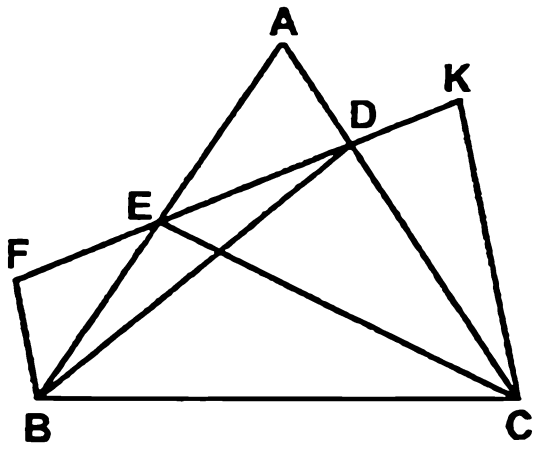
Вказівка: $S_{HPB} = S_{CBA} \cos^2 \angle HPB$. **18.8.** $\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4ab}$.

18.9. 15°. *Вказівка:* доведіть, що $\frac{BM}{BC} = \frac{BC}{BM}$, звідси $\angle BCM = \angle BAC = 45°$. **18.10.** *Вказівка:* оскільки $AM \cdot MB = PM \cdot MK = CM \cdot MD$, то $\frac{AM}{MD} = \frac{CM}{MB}$.

18.11. *Вказівка:* з умови випливає, що $\frac{AE}{EC} = \frac{ED}{AE}$ і оскільки $AE = EM$, то

$$\frac{AE}{EC} = \frac{ED}{EM}.$$

18.12. *Вказівка:* з прямокутного трикутника BDC (мал. 173)



Мал. 173

$DC = BC \cos \angle ACB$, а

$DK = DC \cos \angle CDK =$

$= BC \cos \angle ACB \cos \angle CDK,$

але оскільки

$$\angle CDK = \angle ADE = \angle ABC, \text{ то}$$

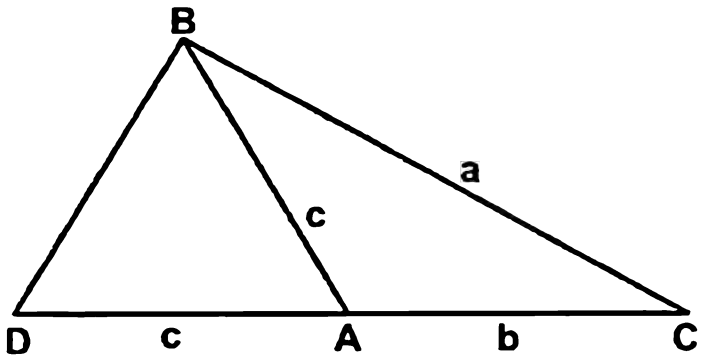
$$DK = BC \cos \angle ACB \cos \angle ABC.$$

Аналогічно $EF = BC \cos \angle ACB \cos \angle ABC$. **18.14.** 60°.

18.16. *Вказівка:* з умови випливає, що

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a},$$

а значить, трикутники DBC і BAC (мал. 174) подібні.

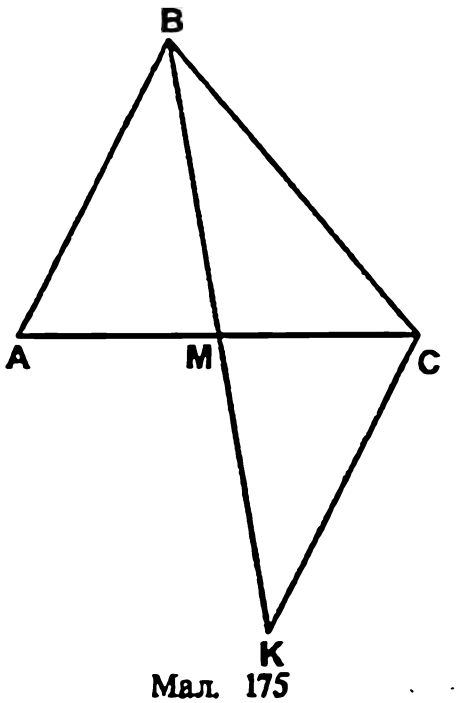


Мал. 174

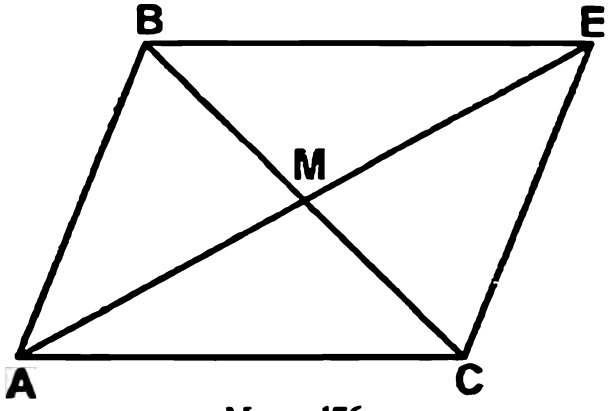
Глава III.

§1. 1.1. *Вказівка:* «подвоївши» дану медіану BM (мал. 175), побудуйте трикутник BCK. **1.2.** $\sqrt{10}$. *Вказівка:* «подвоївши» медіану бічної сторони (мал. 176), скористайтеся теоремою про сторони і діагоналі паралелограма. **1.3.** 6. **1.4.** *Вказівка:* $AD = 2AM$ (мал. 177). З нерівності трикутника випливає, що $DC - AC < AD < AC + CD$. Звідси

$$\frac{DC - AC}{2} < AM < \frac{AC + CD}{2} \text{ або}$$



Мал. 175

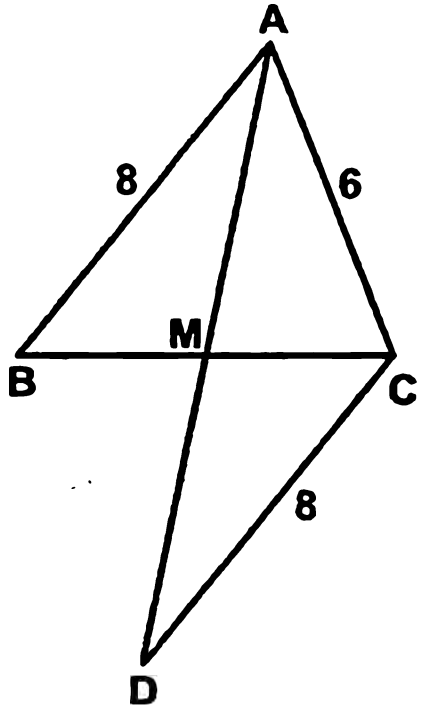


Мал. 176

$1 < AM < 7.$

1.5. *Вказівка:* $\Delta BDC = \Delta B_1D_1C_1$ (мал. 178), звідси $CM = C_1M_1$.

1.6. $\frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$. **1.7.** $\frac{3}{4}$.



Мал. 177

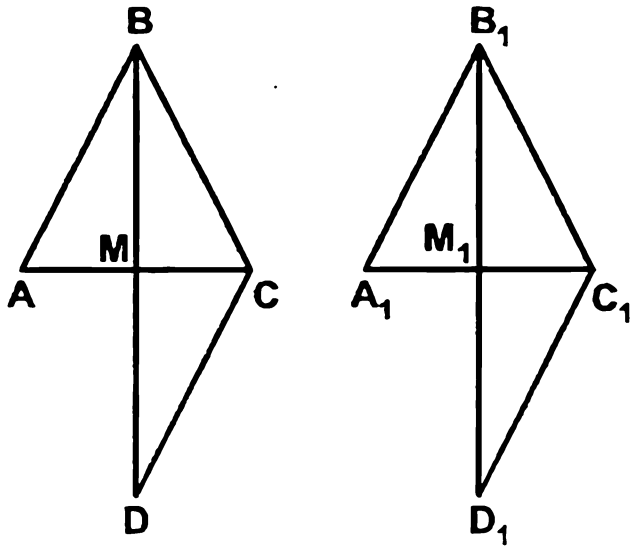
1.8. $\arccos\frac{3}{5}$, $\arccos\frac{4}{5}$. *Вказівка:* «подвоївши» медіану BB_1 (мал. 179), розгляньте трикутники ABD і CBD.

1.9. *Вказівка:*

$$2BB_1 = BD <$$

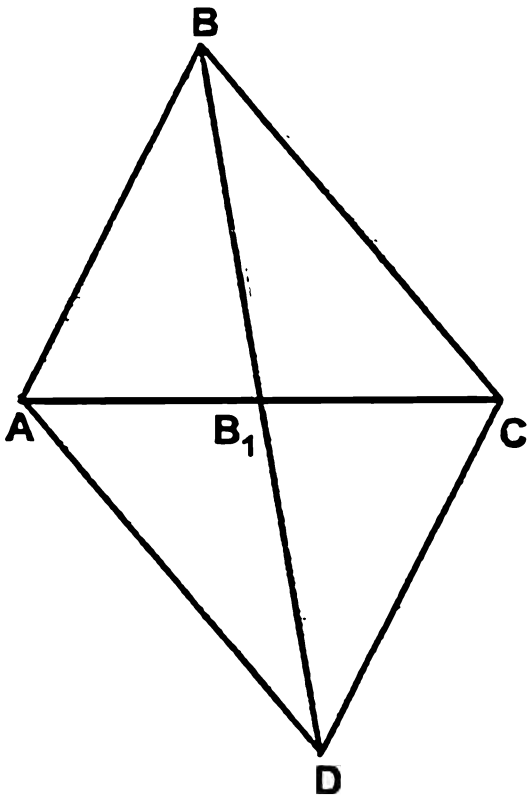
$$< BC + CD =$$

$$= BC + BA.$$

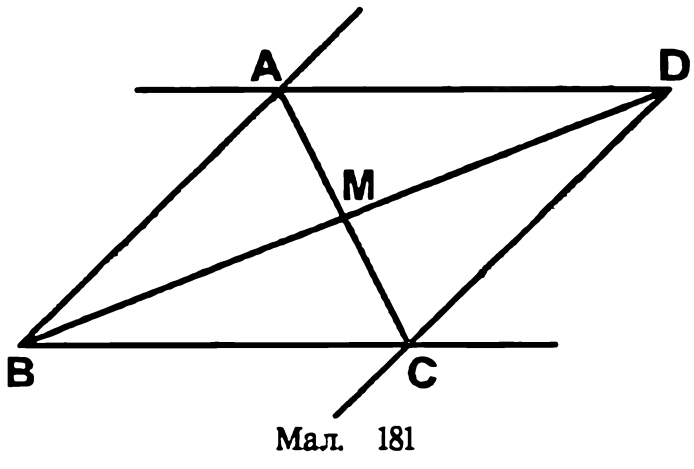


Мал. 178

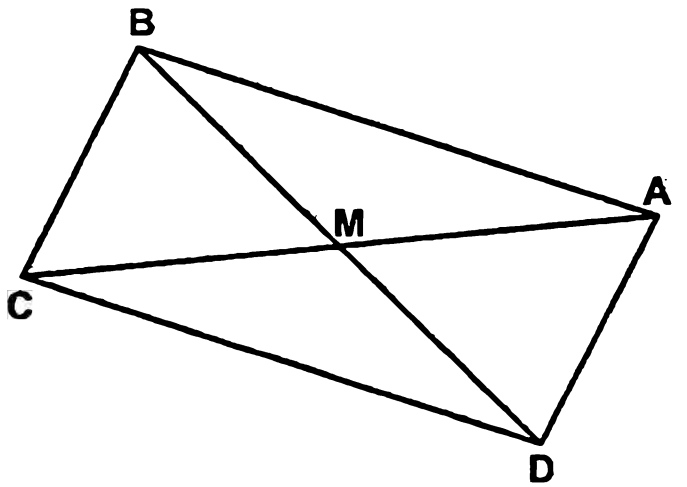
1.10. *Вказівка:* права нерівність легко випливає з попередньої задачі. Для доведення лівої нерівності використовується нерівність трикутника для трикутників AOB, AOC, BOC (мал. 180), де O — точка перетину медіан. **1.11.** *Вказівка:* алгоритм побудови стає зрозумілим з мал. 181. **1.12.** $\frac{2m^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\varphi}{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\varphi - \sin^2\alpha}$. **1.13.** 120°. *Вказівка:* в трикутнику BDC (мал. 182) $\angle BDC = 30°$. **1.14.** *Вказівка:* якщо M — обрана точка (мал. 183), AA_1 — обраний діаметр, а O — спільний центр кіл, то $2(MA^2 + MA_1^2) =$



Мал. 179



Мал. 181



Мал. 182

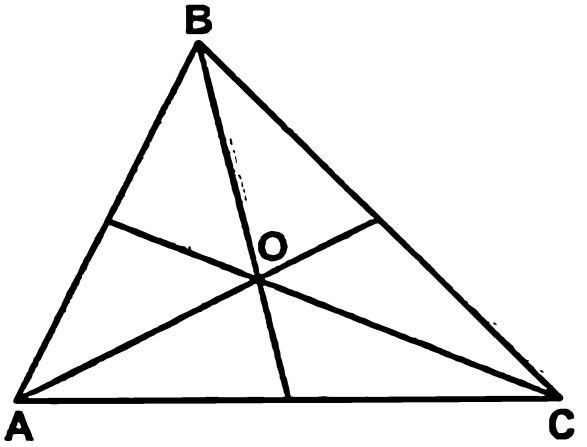


Рис. 180

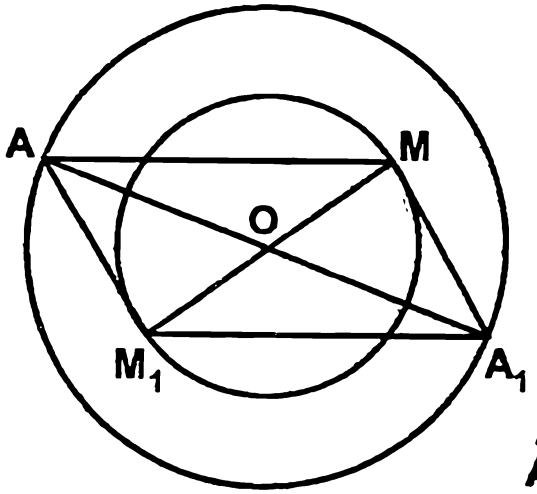
$= MM_1^2 + AA_1^2 = 4r^2 + 4R^2.$

1.15. $\frac{4}{3}$. *Вказівка:* розгляньте трикутник OCD (мал. 184), де O — точка перетину медіан, а $ED = OE$.

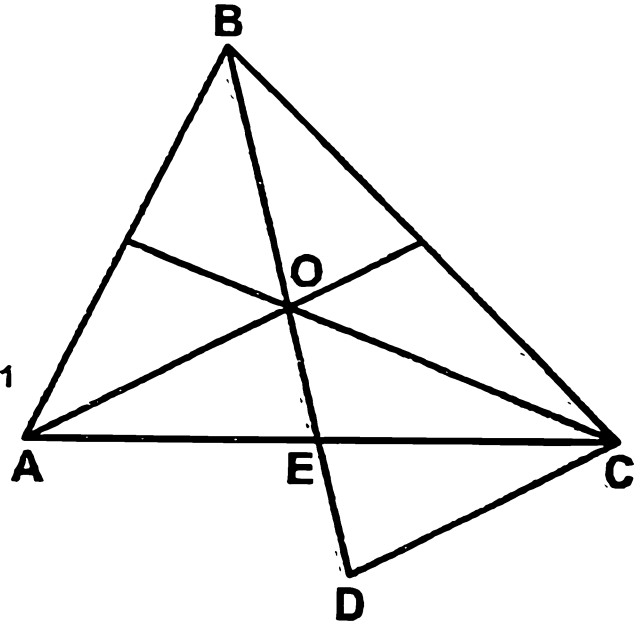
1.16. *Вказівка:* «подовживши» медіану BB_1 (мал. 185) на третину, побудуйте трикутник OCM. В одержаному трикутнику медіана $CB_1 = \frac{1}{2}CA$. Сторони BA і BC знаходяться аналогічно. **1.17.** *Вказівка:* у трикутнику MBD, «подвоївши» медіану MO, розгляньте паралелограм $BMDM_1$:

$$MB^2 + MD^2 = \frac{BD^2 + MM_1^2}{2}$$

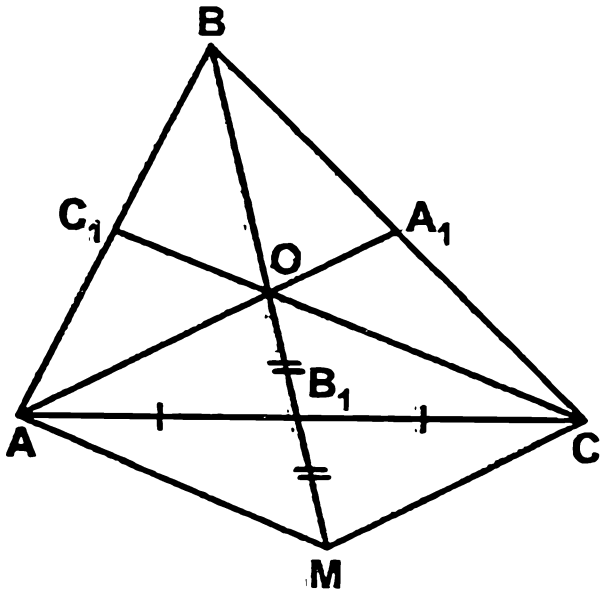
(мал. 186).



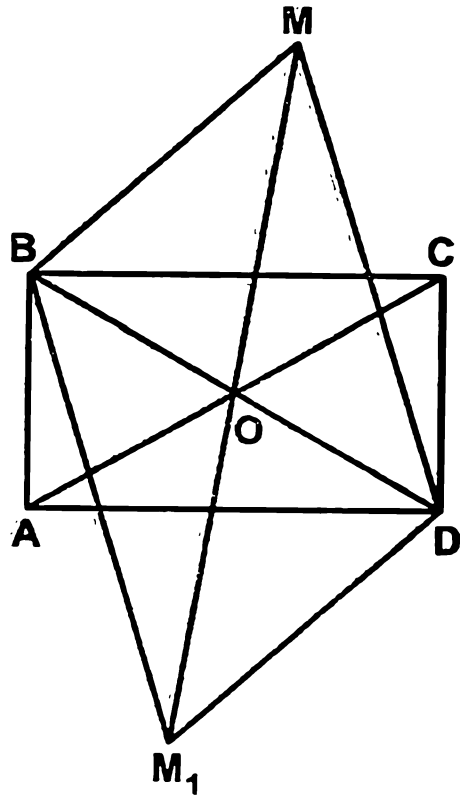
Мал. 183



Мал. 184



Мал. 185



Мал. 186

Аналогічно

$$MA^2 + MC^2 = \frac{AC^2 + MM_1^2}{2}.$$

§2. 2.1. $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **2.2.** 11,2. **2.3.** $\frac{20\sqrt{3}}{7}$. **2.4.** *Вказівка:* сполучіть обрану точку з вершинами трикутника. Площа рівнобічного трикутника дорівнює сумі площ трьох утворених трикутників. **2.7.** *Вказівка:*

$$\frac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \frac{AD}{DB} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BD \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}BD \cdot BC \cdot \sin\alpha}.$$

2.8. 4. **2.9.** *Вказівка:* покажіть, що третя сторона дорівнює $\frac{ab}{a+b}$, де a і b — дані сторони. **2.11.**

$$\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

p — півпериметр. **2.12.** 30. **2.13.** $\frac{ph_2}{h_1+h_2}$, $\frac{ph_1}{h_1+h_2}$. **2.14.** 30°. **2.15.** $\frac{1}{2r}\sqrt{4r^4+a^2(h-2ar)^2}$. **2.16.** Кут тупий. *Вказівка:* нехай $\angle ABD=\alpha$, тоді $\angle DBC=2\alpha$. $S_{ABD}:S_{DBC}=3:4$, тобто $\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin 2\alpha}=\frac{3}{4}$. **2.17.** *Вказівка:* $S_{BAL}+S_{LAC}=S_{ABC}$. **2.18.** *Вказівка:* $S_{AMO}=S_{COK}$ (O — точка перетину медіан), $\Delta AMO\backsim\Delta COK$, отже, $MO=OK$ і т.д. **2.19.** *Вказівка:* $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}$, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}$. **2.20.** *Вказівка:*

$$S_{ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4R},\quad S_{ADC}=\frac{AD\cdot DC\cdot AC}{4R},$$

$$S_{ABD}=\frac{AB\cdot AD\cdot BD}{4R},\quad S_{BCD}=\frac{BC\cdot CD\cdot BD}{4R}.$$

2.22. *Вказівка:* проведіть $BH_1\perp AC$, $OH_2\perp AC$. Покажіть, що $\frac{OB_1}{BB_1}=\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}$ і т.д.

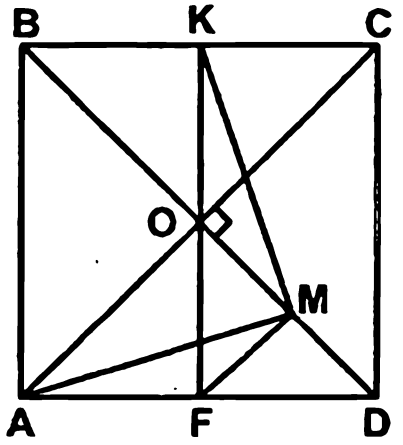
§3. 3.4. *Вказівка:* навколо чотирикутників $ABKH$ і $HKCP$ можна описати кола. **3.5.** *Вказівка:* доведіть, що величина кута CPB постійна. **3.6.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

Вказівка: знайдіть CB. AM — діаметр кола, описаного навколо чотирикутника $ACMB$. **3.7.** *Вказівка:* $\angle APQ=\angle AMQ$. **3.8.** 30° і 150°. *Вказівка:* опишіть коло навколо чотирикутника $MBND$. **3.9.** *Вказівка:* навколо чотирикутника $ACBM$ можна описати коло. **3.10.** *Вказівка:* нехай $\angle BDC=\alpha$, $\angle BDA=\beta$. Виразіть довжини відрізків CE і AF через радіус круга,

описаного навколо чотирикутника $ABCD$, і кути α і β. **3.11.** *Вказівка:*

$$M_1M_2 = OM \cdot \sin \angle AOB.$$

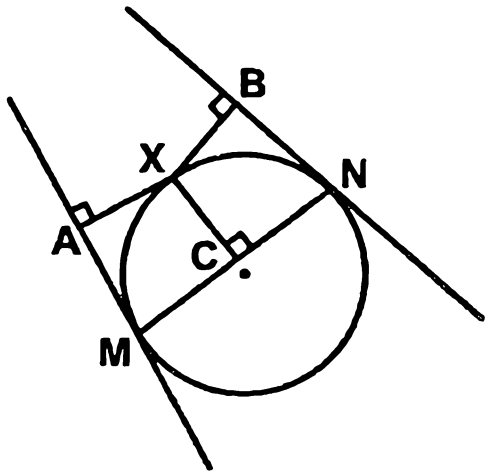
3.12. 45°. *Вказівка:* нехай KO перетне сторону AD в точці F (мал. 187). Очевидно, що $ABKF$ — прямокутник. FM — середня лінія трикутника AOD, отже, $\angle FMO = 90°$. Тоді точки A, B, K, M і F лежать на одному колі. **3.13.** *Вказівка:* навколо чотирикутника $OMBN$ можна описати коло.



Мал. 187

$$\smile MB = \smile NB.$$

3.14. *Вказівка:* навколо чотирикутників $MAXC$ і $CXBN$ (мал. 188) можна описати коло. Доведіть, що



Мал. 188

$$\Delta AXC \backsim \Delta CXB$$

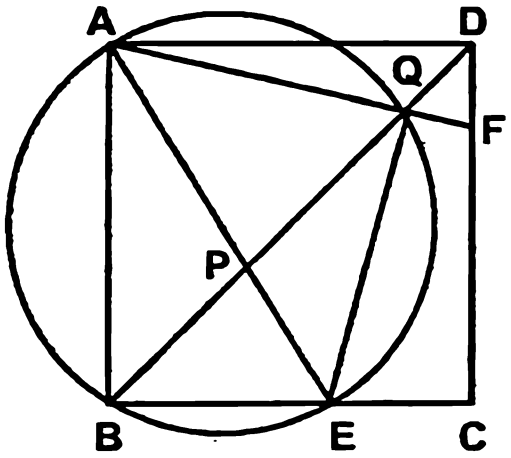
за першою ознакою. **3.15.** 90°. *Вказівка:* побудуйте трикутник AM_1D, який дорівнює трикутнику BMC, так, щоб точка M_1 лежала поза прямокутником. **3.16.** *Вказівка:* $\angle AOB = 120°$, $\angle AHB = 60°$. Навколо чотирикутника $AOBH$ можна описати коло. Знайдіть його центр. **3.17.** 90°. *Вказівка:* нехай BH перетинає сторону квадрата в точці F. Доведіть, що $AF = BQ$. Точки F, H, Q, C, D лежать на одному колі. Знайдіть його діаметр. **3.18.** 90°. **3.19.** *Вказівка:* нехай O — центр описаного кола трикутника ADF. $\angle DOF = 2\angle A$. Доведіть, що $\angle FED = 180° - 2\angle A$. **3.20.** 216. **3.21.** Коло з діаметром AB, виключаючи точку A. **3.22.** $\sqrt{3}$. *Вказівка:* доведіть, що $\angle AED = \angle AFD = 135°$ (E і F — точки перетину бісектрис трикутників ABD і ACD), звідси — точки A, E, F і D лежать на одному колі. **3.23.** *Вказівка:* точки A, C, C_1, A_1 належать колу з діаметром AC. **3.24.** *Вказівка:* відрізок MN ділить хорду C_1A_1 навпіл. Окрім того, MN — середня лінія трапеції $AFKC$. **3.25.** *Вказівка:* $\angle EAQ = \angle QBE = 45°$ (мал. 189), от-

же, навколо $BAQE$ можна описати коло і $\angle AQE = 90°$. Тоді з прямокутного трикутника AQE

$$AE = \sqrt{2}\,AQ.$$

Аналогічно

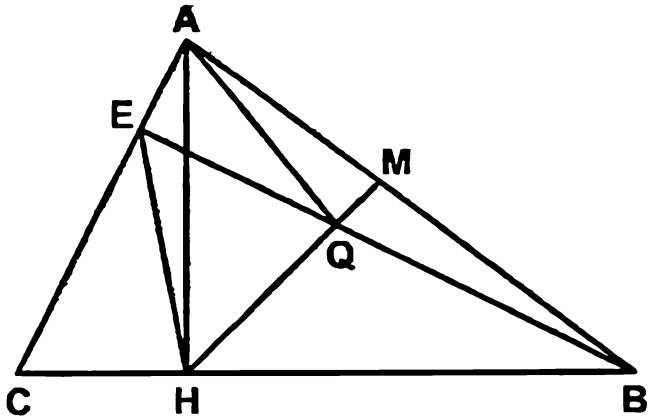
$$AF = \sqrt{2}\,AP.$$



Мал. 189

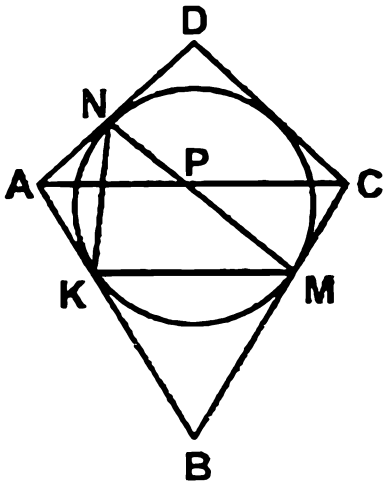
3.26. *Вказівка:* проведіть бісектрису HM трикутника AHB (мал. 190). Тоді $\angle AEQ = \angle AHQ = 45°$ і, отже, навколо чотирикутника $HEAQ$ можна описати коло. Далі використайте, що

$$\angle HEQ = \angle HAQ.$$

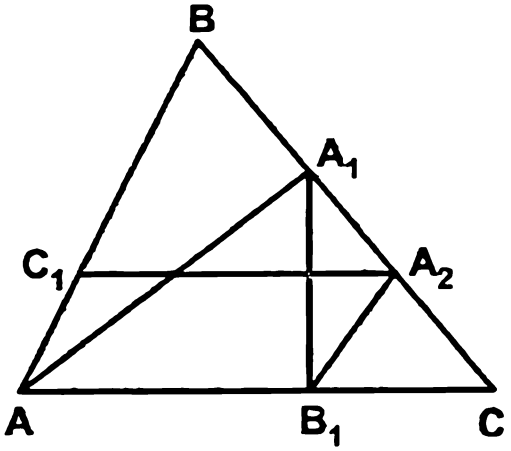


Мал. 190

3.27. *Вказівка:* зауважте, що $\angle AKN = \angle KMN = \angle NPA$ (мал. 191). **3.28.** *Вказівка:* проведіть $C_1A_2 \parallel AC$ (мал. 192). Тоді $\dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{CA_2}{A_2B}$ і $B_1A_2 \parallel AB$. Звідси



Мал. 191

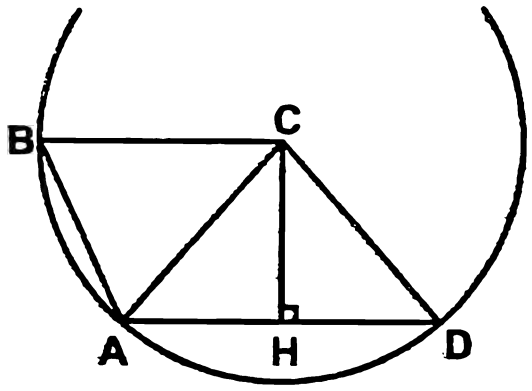


Мал. 192

$$\angle C_1AB_1 = \angle C_1A_2B_1$$

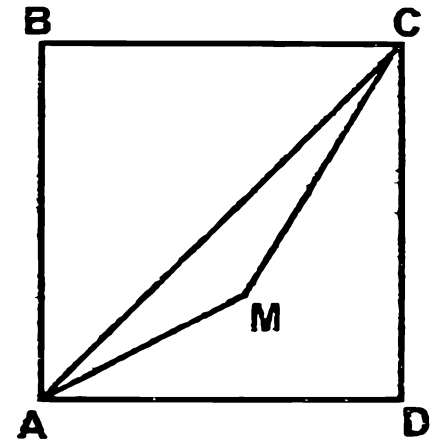
і точки C_1, A_1, A_2, B_1 належать одному колу. Не забудьте розглянути випадок, коли A_1 належить відрізку CA_2. **3.29.** *Вказівка:* описавши коло навколо чотирикутників $OADB$ і $ADMC$, покажіть, що

$$\angle ODA = \angle CDM = 45°.$$

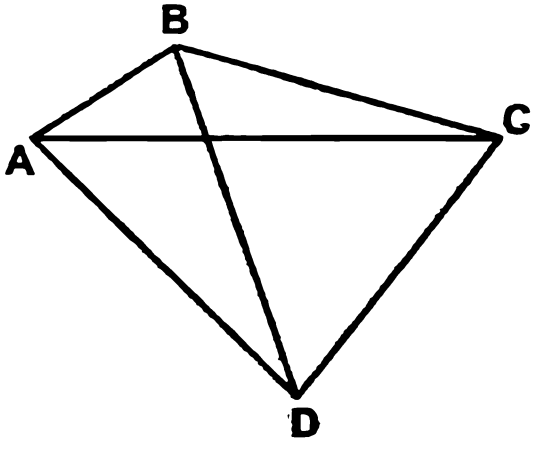


Мал. 193

3.30. 22. *Вказівка:* проведіть коло з центром у точці C і радіусом CB (мал. 193). Оскільки $\angle ACB = 2\angle ADB$, то точка D лежить на цьому колі. З прямокутного трикутника CHD знайдіть висоту CH. **3.31.** 20°. *Вказівка:* точки A, B, C лежать на колі з центром в точці K. **3.32.** 20°. *Вказівка:* точки C, B, M лежать на колі з центром в точці A. **3.33.** 160°. **3.34.** $90° - 2\alpha$. *Вказівка:* покажіть, що $\angle AMC = 135°$ (мал. 194). Тоді точки A, M, C лежать на колі с центром у точці B. **3.35.** *Вказівка:* опишіть коло навколо трикутника ABC (мал. 195) і доведіть, що D — його центр. **3.36.** Можна. **3.37.** *Вказівка:* доведіть методом від супротивного, що якщо відрізки KM і NL перетинаються в точці P, причому $KP \cdot PM = NP \cdot PL$, то точки K, N, M і L лежать на одному колі. **3.38.** *Вказівка:* провівши коло через точки A, B і C, доведіть методом від супротивного, що точка D лежить на цьому колі. **3.39.** *Вказівка:* опишіть коло навколо трикутника ABC. Нехай AH_1 перетинає коло в точці A_1, BH_2 — у точці B_1, CH_3 — в точці C_1. Доведіть,



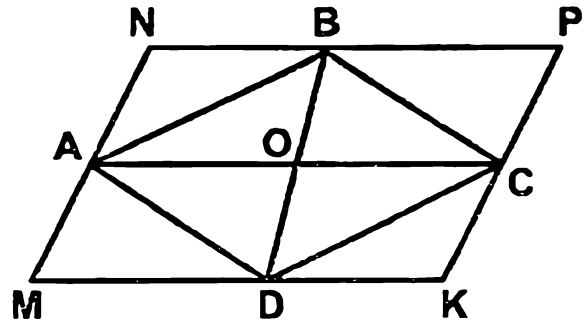
Мал. 194



Мал. 195

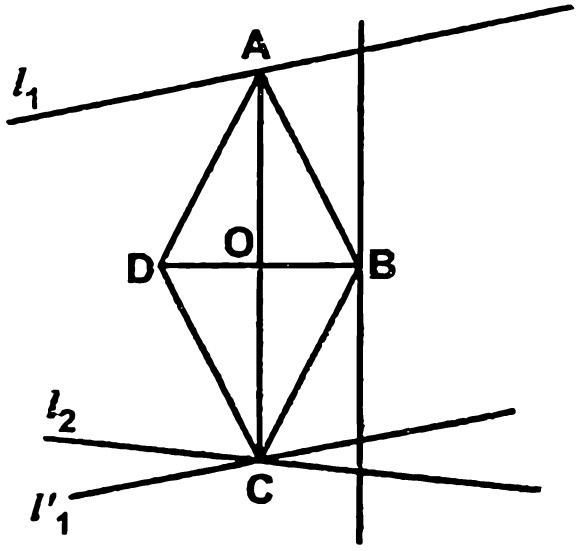
що $HH_1 = H_1A_1$, $HH_2 = H_2B_1$, $HH_3 = H_3C_1$. **3.40.** *Вказівка:* нехай M_1, M_2, M_3, M_4 — задані точки. На відрізках M_1M_2 і M_3M_4 як на діаметрах побудуйте кола. Цим колам належать дві протилежні вершини квадрата. Діагональ квадрата ділить дуги цих кіл навпіл. **3.41.** Шукана точка X така, що $OX^2 = OB \cdot OA$. **3.42.** 90°, 67,5°, 22,5°. *Вказівка:* опишіть коло навколо даного трикутника. Подовжте медіану до перетину з колом. **3.43.** *Вказівка:* опишіть коло навколо даного трикутника. Подовжте медіану до перетину з даним колом. **3.44.** *Вказівка:* опишіть коло навколо даного трикутника. Подовжте бісектрису до перетину с колом. Скористайтеся теоремою про хорди. **3.45.** *Вказівка:* позначимо точку перетину бісектрис через M. Опишіть коло навколо трикутника BMC. Нехай воно перетинає AD в точці K. Доведіть, що трикутники KDC і AMB — рівнобедрені. **3.46.** $\sqrt{4p^2 - q^2}$. *Вказівка:* побудуйте коло з центром у точці D і радіусом p. **3.49.** *Вказівка:* опишіть навколо трикутника ABC коло. Побудуйте ГМТ середин хорд, які проходять через A. **3.50.** *Вказівка:* побудуйте коло, яке дотикається сторін кута в точках P_1 і P_2 так, що $OP_1 = OP_2 = p$, де p — заданий півпериметр. **3.51.** k. *Вказівка:* проведіть бісектрису AF. Подовжте сторону AB за точку B. Теперь стає очевидним, що F — центр зовнівписаного кола трикутника ABD. Звідси DF — бісектриса кута BDC. **3.52.** 150°. *Вказівка:* доведіть, що A_1 і C_1 — центри зовнівписаних кіл відповідно трикутників ABB_1 і CBB_1. **3.53.** 10°. *Вказівка:* подовжте сторону CB за точку B. Доведіть, що E — центр зовнівписаного кола трикутника BDC.

§4. 4.1. Потрібна пряма проходить через центр симетрії паралелограма. **4.2.** *Вказівка:* нехай O — точка перетину діагоналей $ABCD$ (мал. 196). При симетрії відносно O точка A переходить у точку C і відрізок MN — у відрізок PK. Аналогічно NP переходить в KM. Тобто при симетрії відносно точки O $KMNP$ переходить у себе. **4.4.** *Вказівка:* при симетрії кола відносно M відрізок AB переходить у KF. **4.5.** *Вказівка:*

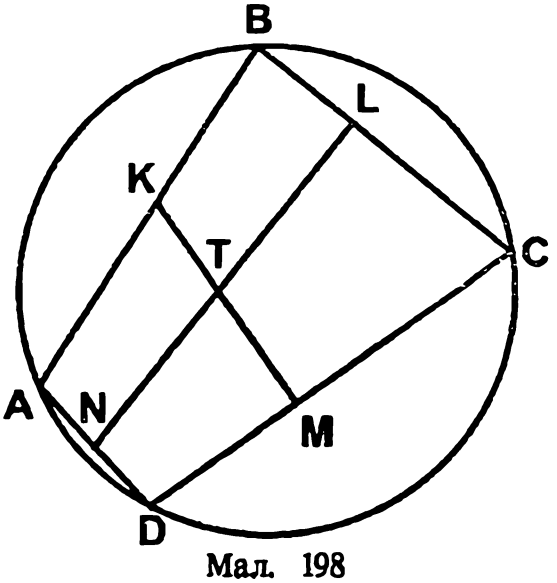


Мал. 196

точки K і M, L і N симетричні відносно центра паралелограма. **4.6.** *Вказівка:* A і B — точки перетину даного кола і кола, симетричного йому відносно точки M. **4.8.** *Вказівка:* розгляньте симетрію даної прямої відносно даної точки. **4.9.** *Вказівка:* знайдіть середину відрізка AC, а далі скористайтеся розв'язком задачі **4.7.** **4.10.** *Вказівка:* знайдіть образи точок M і N при симетрії відносно O. Тепер скористайтеся розв'язком задачі **3.40.** **4.12.** *Вказівка:* точку C (мал. 197) можна знайти як точку перетину прямих l_2 і l_1', де l_1' — образ прямої l_1 відносно точки O. **4.14.** *Вказівка:* вершини B і D — точки перетину прямих b і c', c і b' відповідно, де c' і b' — образи прямих c і b відносно середини відрізка AC. **4.15.** *Вказівка:* відобразіть одне з кіл симетрично відносно точки D. Точка перетину другого кола з одержаним — вершина трикутника. **4.16.** *Вказівка:* відобразіть менше коло S_1 симетрично відносно будь-якої точки A, що належить йому. Нехай B — точка перетину одержаного кола з колом S_2. Тоді AB — шукана пряма. **4.18.** *Вказівка:* доведіть, що дані прямі є образами серединних перпендикулярів до сторін чотирикутника $ABCD$ (мал. 198) при симетрії відносно точки перетину відрізків KM і NL. **4.19.** *Вказівка:* нехай точка D' симетрична D відносно точки P. Площа трикутника PCD дорівнює сумі площ трикутників PBC і PBD'. Зауважте, що точка B лежить на відрізку $D'C$.



Мал. 197

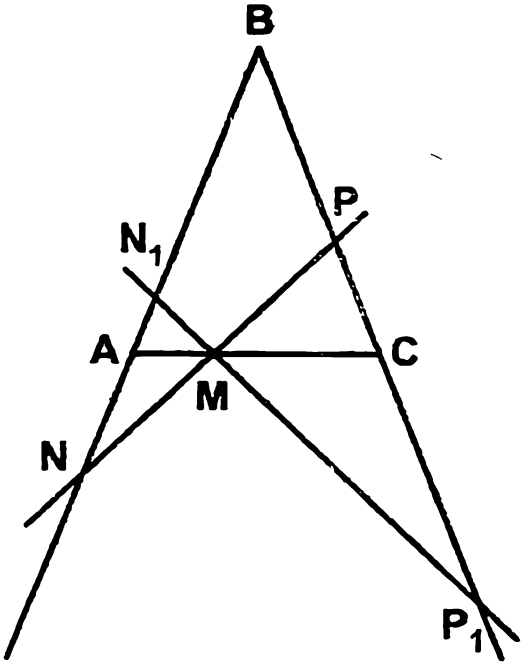


Мал. 198

§5. **5.1.** *Вказівка:* побудуйте точки A_1 і B_1, симетричні відповідно точкам A і B відносно прямої MN. **5.6.** *Вказівка:* відобразіть симетрично одну з вершин B або C відносно прямої AD. **5.7.** *Вказівка:* відобразіть пряму AB відносно кожного з даних серединних перпендикулярів. **5.10.** *Вказівка:* через точку E проведіть пряму, паралельну прямій MN. **5.11.** *Вказівка:* якщо трикутник ABC відобразити симетрично відносно серединного перпендикуляра до сторони BC, то можна побачити трикутник, в якому відомі дві сторони і кут між ними. **5.12.** *Вказівка:* через одну з вершин проведіть пряму, паралельну бічній стороні. Задача зводиться до попередньої. **5.13.** *Вказівка:* нехай точка M_1 симетрична точці M відносно сторони AB. На відрізку M_1N як на діаметрі побудуйте коло. Точка його перетину зі стороною AB є вершиною шуканого трикутника. **5.15.** *Вказівка:* відобразіть точку A симетрично відносно прямої l. **5.16.** *Вказівка:* вершина трикутника лежить на прямій, паралельній основі. Відстань між цими прямими дорівнює висоті трикутника. Задача зводиться до задачі **5.14.** **5.17.** *Вказівка:* відобразіть точку M симетрично відносно сторін BA і BC. Одержані точки сполучіть. **5.20.** *Вказівка:* проведіть серединний перпендикуляр до діагоналі AC. Нехай точка B_1 симетрична B відносно проведеної прямої. $S_{ABCD} = S_{AB_1CD}$. **5.21.** *Вказівка:* нехай C_1 і D_1 — точки, симетричні точкам C і D відносно AB. Хорда C_1D має постійну довжину, оскільки стягує дугу постійної градусної міри. **5.22.** *Вказівка:* відобразіть дане коло симетрично відносно прямої l. Одержане коло перетинає дану пряму в одній з вершин ромба. **5.24.** *Вказівка:* нехай точка B_1 симетрична точці B відносно AC. B_1 лежить на AD. У трикутнику B_1CD відомі всі три сторони. **5.25.** *Вказівка:* нехай точка D_1 симетрична точці D відносно прямої AB. Побудуйте коло з центром у точці D_1 і радіусом $\frac{1}{2}DD_1$. Проведіть з точки C дотичну до побудованого кола. **5.27.** *Вказівка:* побудуйте пряму N_1P_1, симетричну прямій NP відносно прямої AC (мал. 199). N_1 належить BA, P_1 — BC.

$$\Delta NAM \backsim \Delta P_1CM.$$

5.28. *Вказівка:* нехай точка B_1 симетрична точці B відносно бісектриси. B_1 лежить на прямій AC. Нехай точка A_1 симетрична точці A відносно тієї самої бісектриси. $AM + MB = A_1M + MB > A_1B$.



Мал. 199

§6. 6.1. *Вказівка:* розгляньте поворот з центром M на кут 90°. Нехай образ прямої BC перетинає пряму BA в точке N, тобто $R_M^{90^\circ}(BC) = B_1C_1$ і

$$B_1C_1 \cap BA = N.$$

Тоді $R_M^{-90^\circ}(B_1C_1) = BC$, $R_M^{-90^\circ}(N) = K$, причому K належить BC. Отже, $MN = MK$, $\angle NMK = 90^\circ$. **6.7.** *Вказівка:* розгляньте поворот з центром у центрі квадрата на кут 90°. **6.9.** *Вказівка:* нехай дано прямі a_1, a_2, a_3, причому a_2 лежить у смузі прямих a_1 і a_3. Оберемо на a_2 довільну точку O і розглянемо поворот $R_O^{60^\circ}$. Нехай $R_O^{60^\circ}(a_1) = a'_1$. Точка перетину прямих a'_1 і a_3 — одна з вершин шуканого трикутника. **6.11.** *Вказівка:* розгляньте поворот з центром у точці A на кут 90°. **6.12.** 90°. *Вказівка:* розгляньте поворот з центром у точці O на кут 120°. **6.13.** 120°. *Вказівка:* розгляньте поворот з центром у точці O на кут 120°. **6.14.** 120°. *Вказівка:* доведіть, що $AD = 2BC$. Розгляньте поворот з центром у точці O на кут 120°. **6.15.** 60°. **6.17.** *Вказівка:* розгляньте поворот з центром у точці A на кут 90°. **6.20.** *Вказівка:* нехай

$$R_C^{-60^\circ}(A) = A_1,\ AA_1 \parallel CD,$$

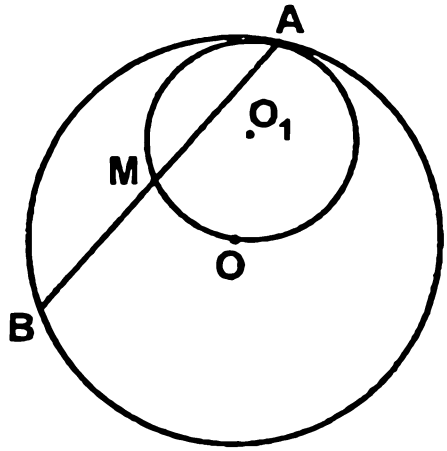
де CD — бісектриса кута C.

$$\Delta AA_1B \backsim \Delta CBD.$$

6.21. *Вказівка:* $R_A^{60^\circ}(P) = P_1$.

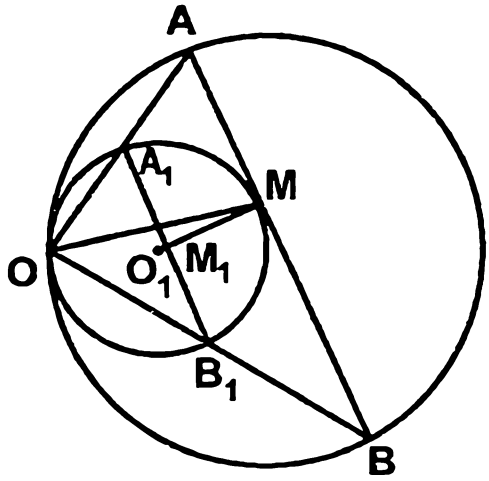
$$P_1B = PC,\ AP = P_1P,\ \angle P_1PA = 60^\circ.$$

§7. 7.1. *Вказівка:* розгляньте гомотетію з центром у точці дотику, коли центр одного кола переходить у центр другого. **7.3.** *Вказівка:* кола гомотетичні з коефіцієнтом $k = 2$ і центром гомотетії в точці A (мал. 200). **7.4.** Якщо M — дана точка, а O — центр кола, то шукане ГМТ — коло з діаметром OM, виключаючи точку M. *Вказівка:* розгляньте гомотетію з центром у точці M і коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$.



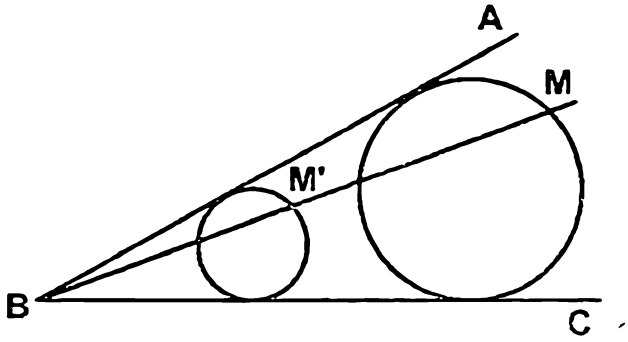
Мал. 200

7.5. *Вказівка:* нехай A_1 і B_1 — точки перетину OA і OB з меншим колом (мал. 201). Оскільки кола гомотетичні з центром O, то $A_1B_1 \parallel AB$ і відрізки O_1M_1 і O_1M — серединні перпендикуляри до A_1B_1 і AB відповідно. Залишається помітити рівність дуг A_1M і MB_1.



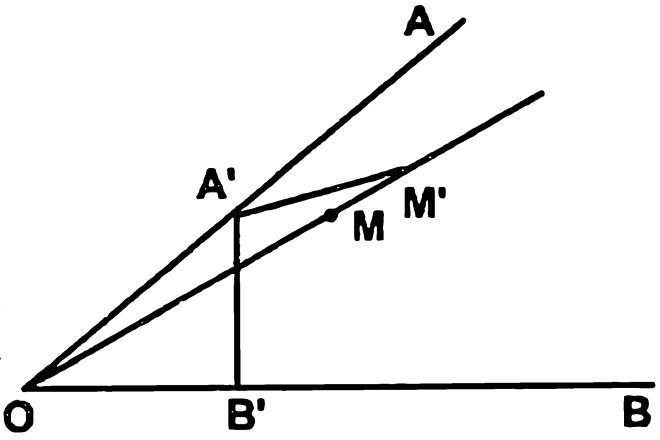
Мал. 201

7.6. *Вказівка:* розгляньте гомотетію з центром у точці P і коефіцієнтом $k = -2$. **7.7.** *Вказівка:* побудуйте довільне коло, яке дотикається сторін кута (мал. 202) і застосуйте гомотетію з центром B і коефіцієнтом $k = \frac{BM}{BM'}$. **7.8.** *Вказівка:* на промені OA оберемо довільну точку A'. Проводимо $A'B' \perp OB$ і $A'M' = A'B'$ (M' лежить на промені OM) (мал. 203). Застосуйте гомотетію з центром у точці O і коефіцієнтом

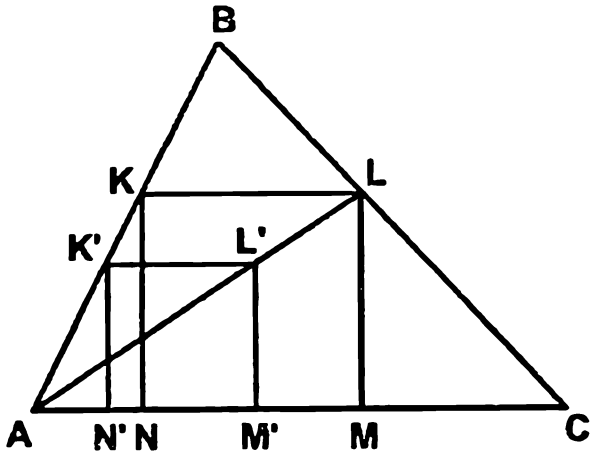


Мал. 202

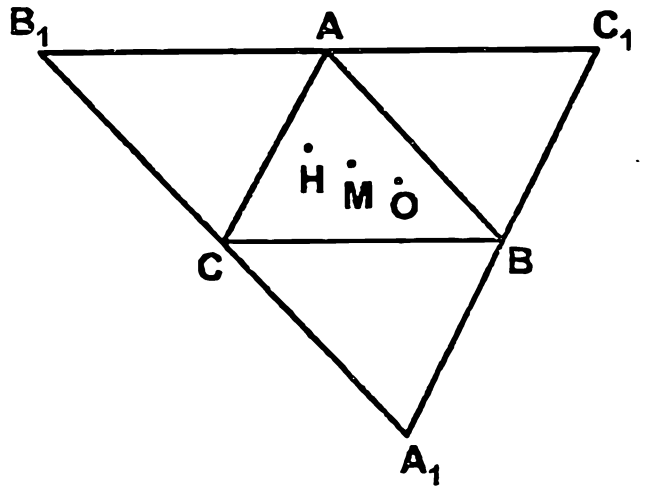
$\frac{OM}{OM'}$. **7.10.** По прямій, паралельній прямій l. **7.11.** $\frac{R}{4}$. **7.12.** *Вказівка:* трикутник з вершинами в одержаних точках гомотетичний трикутнику з вершинами на серединах сторін з коефіцієнтом $k = 2$. **7.15.** *Вказівка:* побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, подібний даному, а потім застосуйте гомотетію з центром у будь-якій з вершин і коефіцієнтом $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}}$. **7.18.** *Вказівка:* побудуйте трикутник так, щоб його сторони були паралельними даним прямим, а дві вершини належали сторонам даного трикутника. Потім застосуйте гомотетію з центром у вершині даного трикутника. **7.19.** *Вказівка:* побудуйте квадрат $K'L'M'N'$, а потім застосуйте гомотетію з центром в точці A (мал. 204). **7.21.** *Вказівка:* доведіть, що трикутник $A_1B_1C_1$ (мал. 205) гомотетичний трикутнику ABC ($B_1C_1 \parallel BC$, $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel AB$) з коефіцієнтом $k = -2$ і центром у точці M.



Мал. 203



Мал. 204



Мал. 205

§8. 8.1. Пряма перпендикулярна до відрізка, що сполучає дані точки. *Вказівка:* оберіть початок координат на середині даного відрізка. Вісь абсцис містить цей відрізок. **8.2.** Коло.

Вказівка: нехай початок координат у точці A. Додатна піввісь збігається з променем $[AB)$. Рівняння кола буде $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$. **8.3.** Коло, центр якого ділить відрізок AB у відношенні 2:1, рахуючи від вершини A, радіусом $\frac{4}{3}AB$. **8.4.** Коло без точок перетину з прямою AB. *Вказівка:* оберемо систему координат як у попередній задачі. Якщо координати точки $C(x; y)$, то $D\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}\right)$. **8.5.** Коло з центром на прямій AB без точок перетину з прямою AB. **8.6.** Коло з центром у центроїді даного трикутника або сам центроїд. **8.7.** Уся площина. *Вказівка:* введіть систему координат з центром у точці перетину діагоналей прямокутника і осями, паралельними його сторонам. **8.8.** Відрізок, довжина якого дорівнює $\frac{1}{2}AB$. **8.9.** *Вказівка:* оберіть систему координат так, щоб початок збігався з точкою перетину діагоналей ромба, а осі містили діагоналі. Якщо $M(x; y)$, то $x^2+y^2=\frac{AB^2}{8}$. **8.11.** *Вказівка:* оберіть систему координат з центром в точці B, вісь абсцис збігається з променем BC. **8.12.** *Вказівка:* оберіть систему координат як у попередній задачі. **8.13.** *Вказівка:* оберіть початок координат у центрі кола з осями, які збігаються з осями симетрії шестикутника. **8.15.** *Вказівка:* нехай початок координат збігається з центром кола. Вісь ординат містить діаметр, про який говориться в умові. **8.17.** *Вказівка:* оберемо початок координат у точці A, вісь абсцис збігається з променем AC. Взявши сторони рівнобічних трикутників за a і b, знайдіть довжини відрізків BQ, BP, QP. **8.18.** *Вказівка:* див. задачу 2. **8.19.** $\frac{\sqrt{73}}{5}$. *Вказівка:* оберіть початок координат у точці D, вісь абсцис — $[DA)$, вісь ординат — $[DB)$.

§9. 9.1. *Вказівка:* нехай O — точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ (мал. 206). Точки M і N — середини сторін BC і AD відповідно. Позначимо $\vec{OB}=\vec{a}$, $\vec{OC}=\vec{b}$. Тоді

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$$ а

$$\vec{ON} = \frac{1}{2}(\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}).$$

Оскільки $\vec{OM}$ і $\vec{ON}$ — колінеарні, то

$$\vec{ON} = k\,\vec{OM}$$ або

$$\frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}).$$

Звідси $(k - \alpha)\,\vec{a} = (\beta - k)\,\vec{b}$, але оскільки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні, то $k = \alpha = \beta$. Маємо:

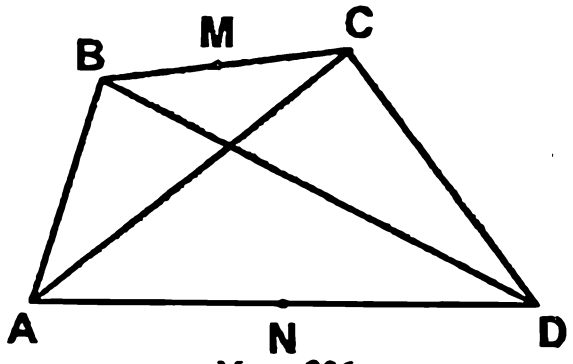
$$\vec{BC} = \vec{b} - \vec{a},\ \vec{AD} = \alpha\,(\vec{b} - \vec{a}),$$

отже, $BC \parallel AD$. Аналогічно можна показати, що $AB \parallel CD$. **9.3.** *Вказівка:* якщо точки K, L і P — середини відрізків AA', MM' і BB' відповідно, то

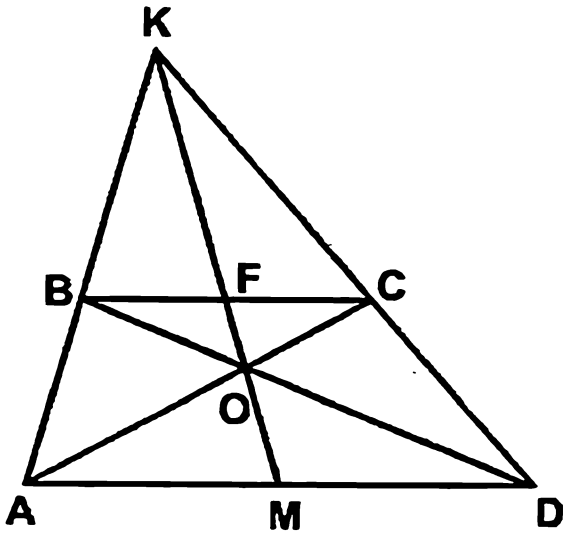
$$\vec{KL} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{A'B'}),$$ а

$$\vec{KP} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A'B'}).$$

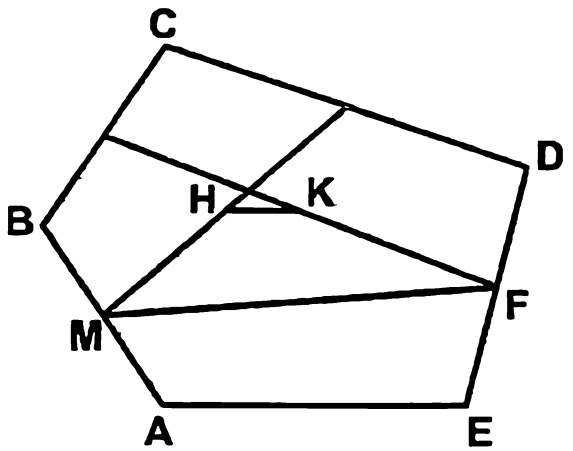
9.5. *Вказівка:*



Мал. 206



Мал. 207



Мал. 208

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD}),$$

$$\vec{OF} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$$ (мал. 207).

З подібності трикутників AOD і COB:

$$\vec{OD} = k\,\vec{OB},\ \vec{OA} = k\,\vec{OC}$$ і $$\vec{OM} = \frac{k}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}).$$

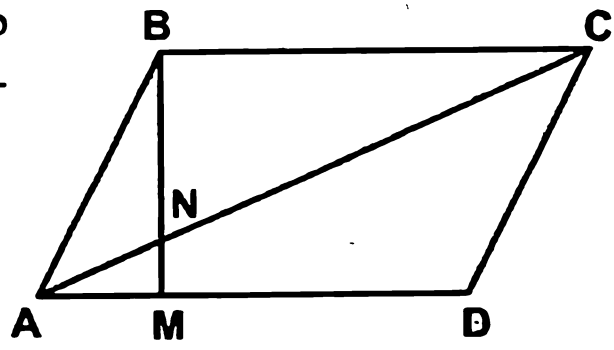
Для доведення належності точок K, F і M до одної прямої використайте подібність трикутників BKC і AKD

9.7. *Вказівка:* доведіть, що вектор $\vec{HK}$ колінеарний вектору $\vec{MF}$ (мал. 208).

9.9. *Вказівка:* $\vec{BN} = \frac{1}{6}\vec{BC} +$

$$+ \frac{5}{6}\vec{BA} = \frac{1}{6}\vec{AD} + \frac{5}{6}\vec{BA}$$

(мал. 209).



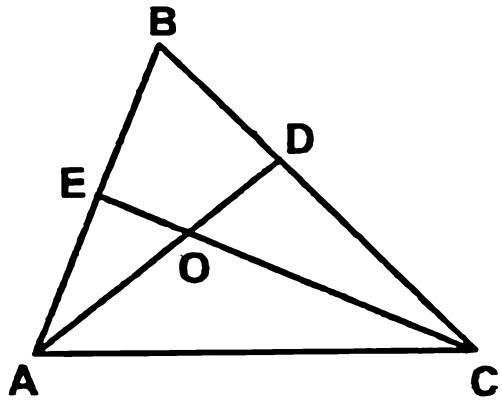
Мал. 209

9.10. $\frac{2}{3}$. *Вказівка:*

$$\vec{CE} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}),$$

$$\vec{CO} = k\,\vec{CE} = \frac{k}{2}\vec{CA} +$$

$$+ \frac{k}{2}\vec{CB} \text{ (мал. 210).}$$



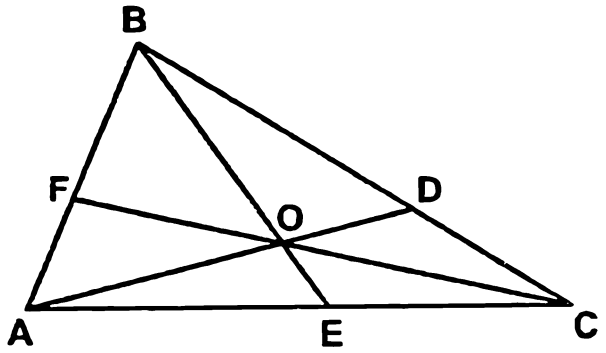
Мал. 210

$$\vec{CO} = \alpha\,\vec{CA} + \beta\,\vec{CD} =$$

$$= \alpha\,\vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{CB}.$$

Прирівняйте коефіцієнти в одержаних рівняннях і врахуйте, що $\alpha + \beta = 1$.

9.11. *Вказівка:* знайдіть відношення $\frac{BO}{OE}$ (мал. 211) і доведіть, що вектори AO і OD колінеарні (O — точка перетину BE і CF).



Мал. 211

9.12. *Вказівка:* якщо M_1 і M_2 — точки перетину медіан трикутників ABC і DEF, то

$$\vec{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF}).$$

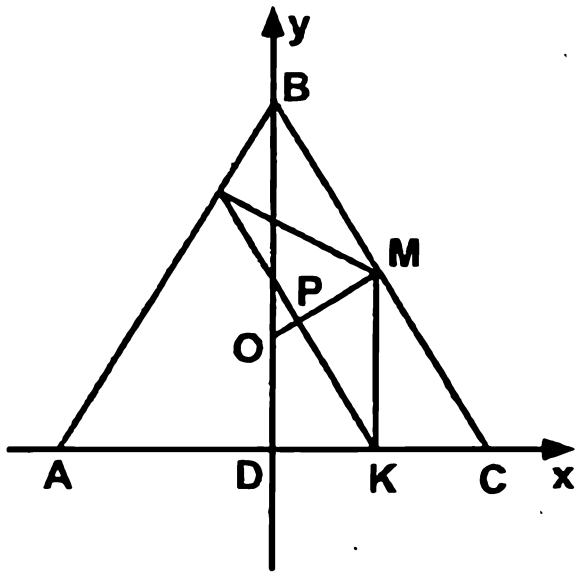
9.15. *Вказівка:* введіть систему координат (мал. 212): $C(1; 0)$, $K(x; 0)$,

$M(x;\ (1-x)\sqrt{3})$, $N\left(-\frac{x}{2};\ \sqrt{3}-\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$. Якщо P_1 — середина NK, то

$$P_1\left(\frac{x}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{x\sqrt{3}}{4}\right).$$

Доведіть, що

$$\vec{MP}=\frac{3}{4}\vec{MO}.$$



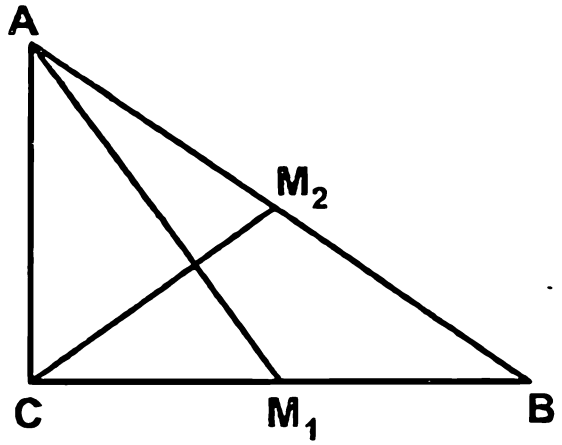
Мал. 212

9.16. $\frac{\sqrt{199}}{2}$. *Вказівка:*

$$\vec{AN}=\frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{3}{4}\vec{AC}.$$

Потім одержану рівність піднесіть до скалярного квадрата. **9.17.** 30°. **9.18.** $\frac{3+\sqrt{73}}{8}$. *Вказівка:* $\vec{AD}=\frac{1}{2}\vec{BC}-\vec{BA}$, $\vec{BE}=\frac{2}{3}\vec{BC}+\frac{1}{3}\vec{BA}$. З урахуванням $\vec{AD}\cdot\vec{BE}=0$ і $\angle ABC=60°$ отримайте рівняння

$$4\frac{BC^2}{BA^2}-3\frac{BC}{BA}-4=0.$$



Мал. 213

9.19. 4. **9.20.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.21.** $\arccos\frac{11\sqrt{91}}{182}$. **9.22.** *Вказівка:*

$$\vec{CM_2}=\frac{1}{2}(\vec{CA}+\vec{CB}),$$

$$\vec{AM_1}=\frac{1}{2}\vec{CB}-\vec{CA}$$ (мал. 213).

Перевірте, що $\vec{CM_2}\cdot\vec{AM_1}=0$. **9.23.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$. **9.24.** $\arccos\frac{3\sqrt{130}}{130}$. *Вказівка:* введіть систему координат з центром у точці перетину діагоналей. **9.25.** $\frac{8}{7}$. *Вказівка:* введіть систему координат так, що $A(0;0)$, $B(0;p)$, $C(1;p)$, $D(k;0)$. Тоді

$$E\left(\frac{k+1}{2};\ \frac{p}{2}\right),\ \vec{AE}=\left(\frac{k+1}{2};\ \frac{p}{2}\right),\ \vec{CD}=(k-1;\ -p).$$

Тепер з умов $\vec{AE}\cdot\vec{CD}=0$ і $|\vec{AE}|^2=4\,|\vec{AB}|^2$ одержіть систему для k і p. **9.26.** *Вказівка:*

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{AB\cdot AC\sin A}+\frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{AB\cdot BC\sin B}+$$

$$+\frac{\vec{BC}\cdot\vec{CA}}{BC\cdot CA\sin C}=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}+\vec{AB}\cdot\vec{BC}+\vec{BC}\cdot\vec{CA}}{2S}.$$

Далі скористайтеся тим, що

$$2\,(\vec{AB}\cdot\vec{AC}+\vec{AB}\cdot\vec{BC}+\vec{BC}\cdot\vec{CA})=$$

$$=(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA})^2-(|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2).$$

9.27. 60°. *Вказівка:* введіте систему координат у центрі шестикутника.

Глава IV.

1.1. $4\sqrt{37}$ або $2\sqrt{193}$. *Розв'язання:* I *випадок.* Основа висоти BD належить стороні AC (мал. 214). Нехай $AB=26$, $BC=30$, $BD=24$. Тоді знаходимо

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{26^2-24^2}=10,$$

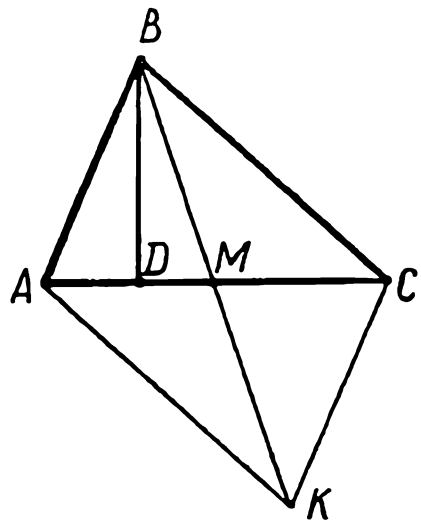
$$DC=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{30^2-24^2}=18.$$

Звідси $AC=AD+DC=28$.

Для того, щоб обчислити довжину медіани BM, добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ABCK$. Тепер, застосовуючи теорему про сторони і діагоналі паралелограма, маємо $BK^2+AC^2=2\,(AB^2+BC^2)$.

Підставляючи числові дані, знаходимо

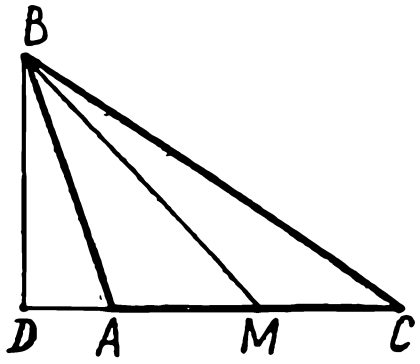
$$BK=8\sqrt{37},\ BM=\frac{1}{2}BK=4\sqrt{37}.$$



Мал. 214

II *випадок.* Основа висоти лежить на продовженні сторони (мал. 215). У цьому випадку $AC=DC-AD=8$.

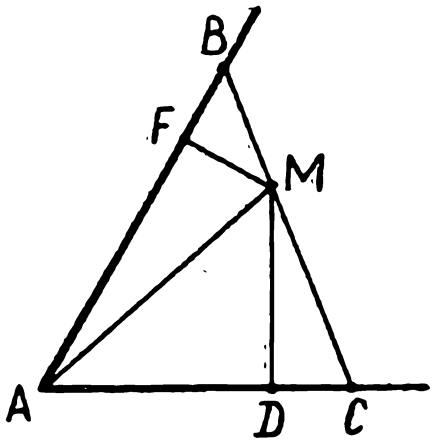
Тепер, скориставшись тим самим прийомом, що і в першому випадку, нескладно одержати $BM = \sqrt{772} = 2\sqrt{193}$.



Мал. 215

1.2. $4\sqrt{3}$. *Розв'язання:* цікаво, що в цій задачі не реалізується якраз той випадок, який першим спадає на думку.

I *випадок.* Нехай точку M розміщено всередині даного кута (мал. 216). $MF = \sqrt{3}$, $MD = 3\sqrt{3}$, $P_{ABC} = 12$, $\angle BAC = 60°$.



Мал. 216

Позначимо $AC = x$, $AB = y$. За теоремою косинусів з урахуванням введених позначень

$$BC = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}.$$

Звідси одержуємо рівняння

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy} = 12.$$

Для того, щоб одержати ще одне рівняння, виразимо площу трикутника BAC двома способами. З одного боку, $2S_{BAC} = \frac{xy\sqrt{3}}{2}$, а з другого — $2S_{BAC} = 2S_{BMA} + 2S_{CMA} = \sqrt{3}y + 3\sqrt{3}x$. Тепер можна записати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy} = 12, \\ xy = 2y + 6x, \end{cases}$$

що, як нескладно переконатися, розв'язків не має.

II *випадок.* Розглянемо ситуацію, коли точку M розміщено так, як показано на мал. 217.

Збережемо відповідні позначення. Очевидно в цьому випадку система рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy} = 12, \\ xy = 6x - 2y. \end{cases}$$

Отримана система має єдиний розв'язок $x = 4$, $y = 4$.

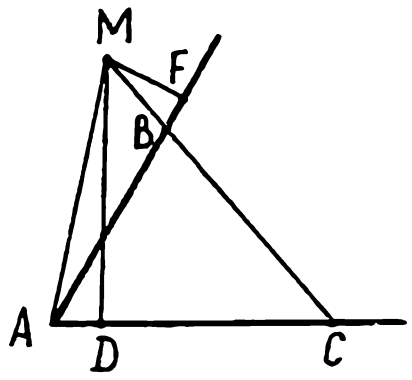
1.3. Якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то $\frac{R\left(\cos\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}$ або

$\frac{R\left(\cos\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}$; якщо $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то $\frac{R\left(\cos\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}$;

якщо $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то

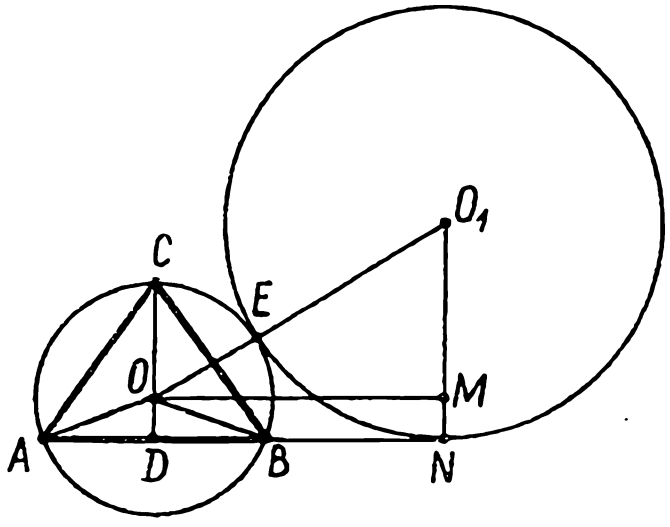
$\frac{R\left(\cos\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}$ або

$\frac{R\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}$.



Мал. 217

Розв'язання: тут джерелом другого розв'язку є неоднозначне положення точки E на описаному колі. Справді, адже вибрати дугу BC можна двома способами.



Мал. 218

I *випадок* (мал. 218). Позначимо радіус кола з центром у точці O_1 $O_1N = x$. Тоді $OO_1 = OE + EO_1 = R + x$. Окрім того,

$\angle O_1OM = \angle BCD = \frac{\alpha}{2}$ як кути із взаємно перпендикулярними сторонами, а $\angle BOD = \alpha$ як кут, що дорівнює половині центрального кута, який спирається на дугу AB.

З трикутника O_1OM

$$O_1M = OO_1 \sin \angle O_1OM =$$

$$= (R + x) \sin \frac{\alpha}{2}.$$

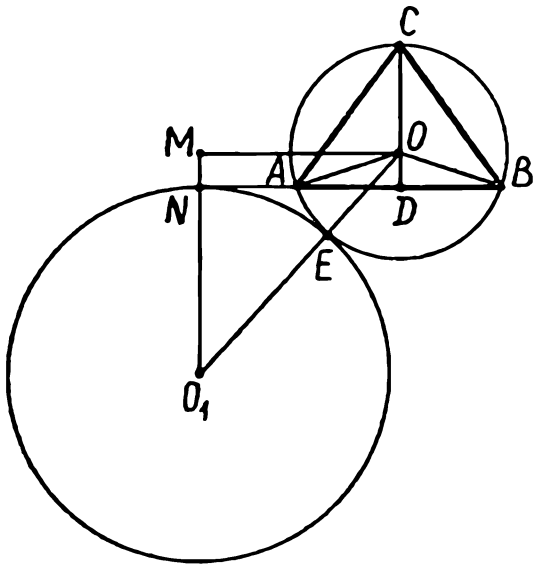
З іншого боку,

$$O_1M = O_1N - MN = O_1N - OD = x - R\cos\alpha.$$

Одержуємо рівняння

$$x - R\cos\alpha = (R + x)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Звідси $x = \dfrac{R\left(\cos\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}$.



Мал. 219

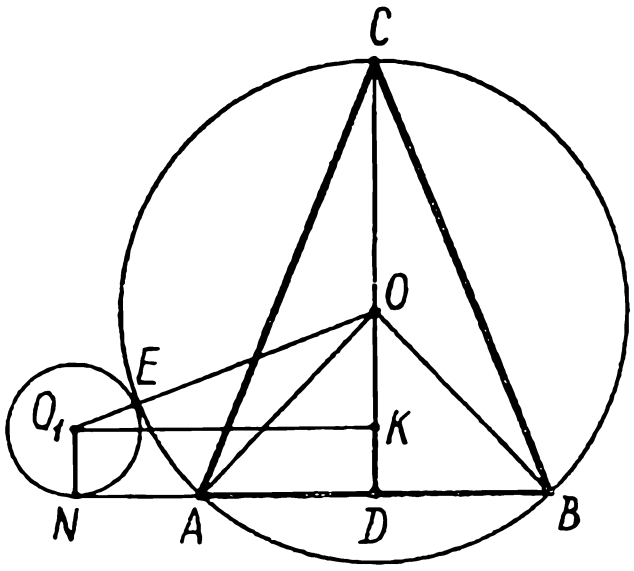
II *випадок* (мал. 219). Тут, зберігаючи колишні позначення, маємо: $O_1M = (R + x)\sin\frac{\alpha}{2}$,

$$O_1M = O_1N + MN = O_1N + OD = x + R\cos\alpha.$$

Розв'язуючи рівняння $(R + x)\sin\frac{\alpha}{2} = R\cos\alpha + x$, одержуємо

$$x = \frac{R\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Тепер важливо не зробити передчасного висновку, що розв'язання задачі закінчено. Справді, неважко зрозуміти, що при $\alpha < \frac{\pi}{3}$ точки O і O_1 знаходяться в одній півплощині відносно прямої AB, а при



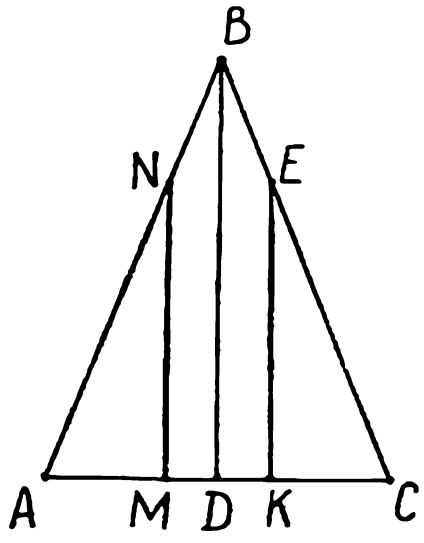
Мал. 220

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ (точки E і A збігаються), задача взагалі не має розв'язків.

Отже, розглянемо випадок $\alpha < \frac{\pi}{3}$ (мал. 220).

O_1N — радіус кола з центром у точці O_1. Нехай $O_1N = O_1E = x$, тоді $O_1O = R + x$. Нескладно встановити, що $\angle O O_1K = \frac{\alpha}{2}$, $\angle BOD = \alpha$, $OD = R\cos\alpha$ і $OK = OD - KD = OD - O_1N = R\cos\alpha - x$. З іншого боку, з трикутника $O O_1 K$ $OK = (R + x)\sin\frac{\alpha}{2}$. Одержуємо рівняння $(R + x)\sin\frac{\alpha}{2} = R\cos\alpha - x$.

Звідси $x = \dfrac{R\left(\cos\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}$.



Мал. 221

1.4. $\operatorname{arctg}\sqrt{6}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{6}$, $\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{6}$ або $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{8}$, $\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{6}$.

Розв'язання: I *випадок.* Кути BAC і BCA — гострі (мал. 221).

$$NM \perp AC,\ EK \perp AC \text{ і } NM = EK = AC.$$

Окрім того, $S_{AMN} = S_{CEK} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

Покажемо, що трикутник ABC рівнобедрений.

Справді, трикутники ANM і CEK рівновеликі прямокутні і мають пару рівних катетів $NM = EK$. Звідси випливає, що $\Delta ANM = \Delta CEK$ і $\angle BAC = \angle BCA$.

Оскільки $S_{CBD} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, $S_{CEK} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ і $\Delta CBD \backsim \Delta CEK$, то нескладно одержати $\frac{BD}{EK} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

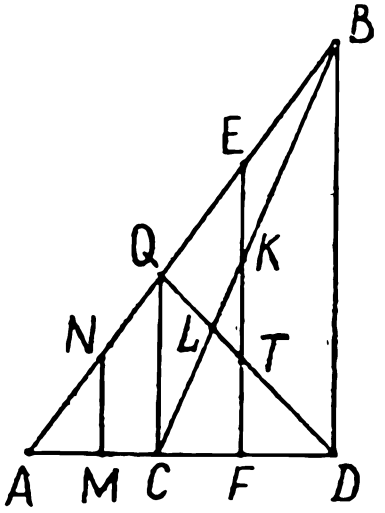
$$\operatorname{tg} \angle BCD = \frac{BD}{DC} = \frac{BD}{0{,}5\,EK} = \sqrt{6}.$$

Звідси $\angle BCD = \angle BAC = \operatorname{arctg}\sqrt{6}$, а $\angle CBA = \pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{6}$.

II *випадок.* Розглянемо ситуацію, коли один з кутів, прилеглих до сторони AC, тупий (мал. 222). Тут

$$NM = EK = AC \text{ і}$$

$$S_{ANM} = S_{BKE} = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$



Мал. 222

Проведемо відрізки QC і BD паралельно NM і EF, а також відрізок DQ (F і T — точки перетину прямої EK з відрізками AD і DQ відповідно). Зрозуміло, що $\frac{BE}{BQ} = \frac{EK}{QC}$ і $\frac{DF}{DC} = \frac{FT}{QC}$, але $\frac{BE}{BQ} = \frac{DF}{DC}$, отже, $\frac{EK}{QC} = \frac{FT}{QC}$, звідки $EK = FT = NM$.

Теперь зауважимо, що $S_{KBE} = S_{FTD}$ (кожний з цих трикутників має висоту, що дорівнює DF), отже, $S_{FTD} = S_{MNA}$, звідси з урахування рівності $FT = NM$ зразу випливає, що трикутник AQD рівнобедрений.

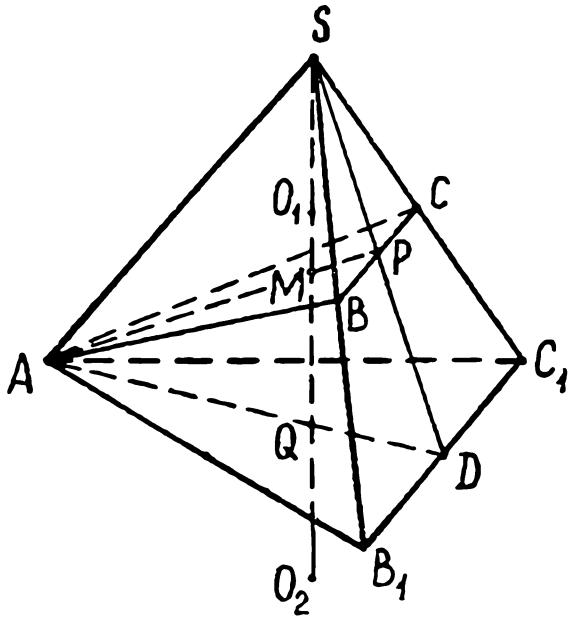
Покажемо, що відрізки NM і TF ділять трикутник AQD на три рівновеликі частини. Для цього досить довести, що $S_{AQD} = S_{ABC}$.

Справді, $S_{ABC} = S_{AQLC} + S_{QBL}$, а $S_{AQD} = S_{AQLC} + S_{CLD}$, але $S_{QBL} = S_{CLD}$ (тут ми використали відому властивість трапеції, в даному випадку трапеції $DCQB$).

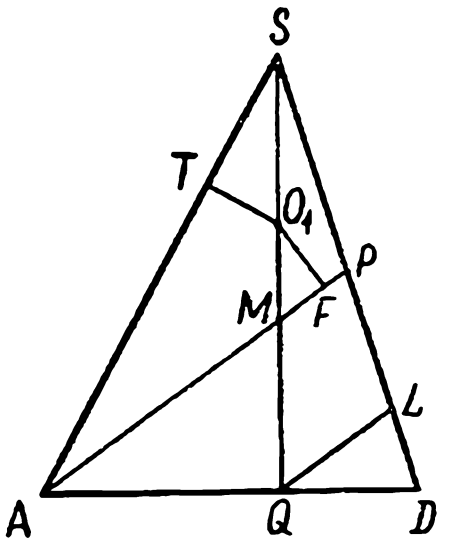
Інше нескладно, і ми пропонуємо читачеві закінчити розв'язання самостійно.

1.5. $\frac{2a\sqrt{2}}{5 \pm \sqrt{11}}$. *Розв'язання.* Тут існування другого розв'язку зумовлено тим, що центр сфери може лежати як в одному, так і в іншому півпросторі відносно площини ABC (на мал. 223 це точки O_1 і O_2).

I *випадок.* Центр сфери розміщено в одному півпросторі з точкою S. Зручно розглядати правильний тетраедр з бічними ребрами $SA = SB_1 = SC_1 = 2a$, а трикутник ABC як переріз



Мал. 223



Мал. 224

цього тетраедра. Зрозуміло, що центр сфери розміщено на висоті SQ тетраедра AB_1C_1S.

Розглянемо трикутник ASD (мал. 224). $SD = AD = a\sqrt{3}$, $AS = 2a$. T і F — точки дотику сфери з прямими AS і AP відповідно. $AQ = 2\,QD$.

Легко одержати $SQ = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Проведемо $QL \parallel AP$.

$$\frac{DL}{LP} = \frac{QD}{QA} = \frac{1}{2},\ \frac{QM}{MS} = \frac{LP}{PS} = \frac{LP}{PD} = \frac{2}{3}.$$

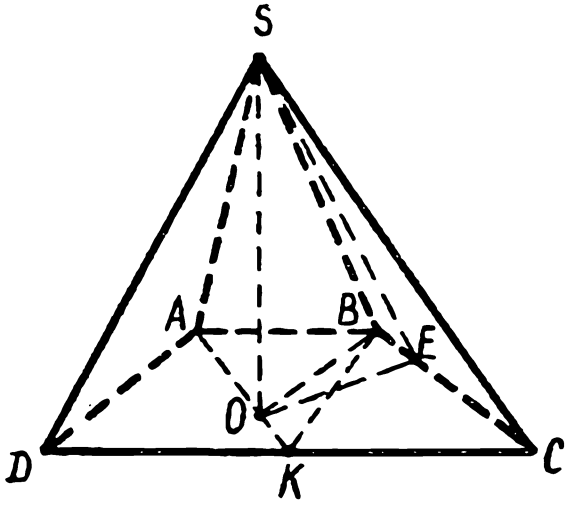
Звідси $\frac{MS}{SQ} = \frac{3}{5}$ і $MS = \frac{6a\sqrt{\frac{2}{3}}}{5}$.

Нехай $TO_1 = FO_1 = x$. З трикутників TSO_1 і FO_1M $\frac{x}{\sin \angle TSO_1} + \frac{x}{\cos \angle FO_1M} = MS$, але $\sin \angle TSO_1 = \frac{AQ}{AS} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ і $\operatorname{tg} \angle FO_1M = \operatorname{tg} \angle MAQ = \frac{MQ}{AQ} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

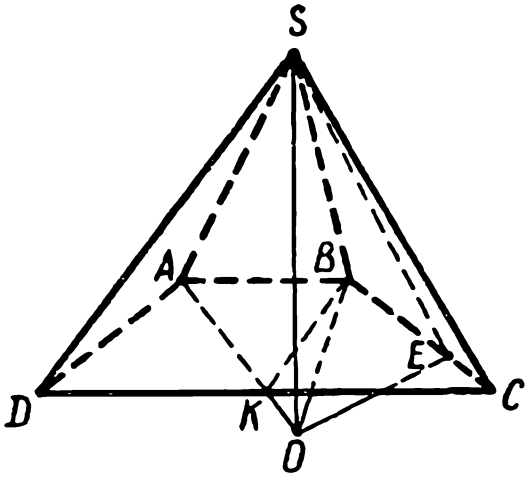
Маємо $\cos \angle FO_1M = \frac{5}{\sqrt{33}}$. Тепер одержуємо рівняння $x\sqrt{3} + \frac{x\sqrt{33}}{5} = \frac{6a\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$, звідси $x = \frac{2a\sqrt{2}}{5 + \sqrt{11}}$. Другий випадок читач може розглянути самостійно.

1.6. $\operatorname{arctg} \dfrac{3h}{\sqrt{5}\, a \sin\left(\alpha + \arcsin\dfrac{2}{3}\right)}$ або

$\operatorname{arctg} \dfrac{h\sqrt{7}}{\sqrt{3}\, a \arcsin\left(\alpha + \arcsin\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)}$.



Мал. 225



Мал. 226

Розв'язання: I *випадок.* Точку O розміщено всередині трапеції $ABCD$ (мал. 225).

Нехай $OK = x$, $AO = 8x$, $AK = BK = 9x$. Трикутники AOB і BOK прямокутні ($\angle AOB = \angle BOK = 90°$).

Маємо $BO = \sqrt{BK^2 - OK^2} = \sqrt{(9x)^2 - x^2} = 4x\sqrt{5}$.

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{(8x)^2 + (4x\sqrt{5})^2} = 12x.$$

Звідси $12x = a$ і $x = \dfrac{a}{12}$. Введемо позначення $\angle ABO = \beta$, $\angle OBE = \varphi$. $\sin\beta = \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{2}{3}$. Тоді $\varphi = 180° - \alpha - \arcsin\dfrac{2}{3}$. Проведемо $OE \perp BC$. З трикутника OBE

$$OE = OB \sin\varphi = \frac{a\sqrt{5}}{3} \sin\left(\alpha + \arcsin\frac{2}{3}\right).$$

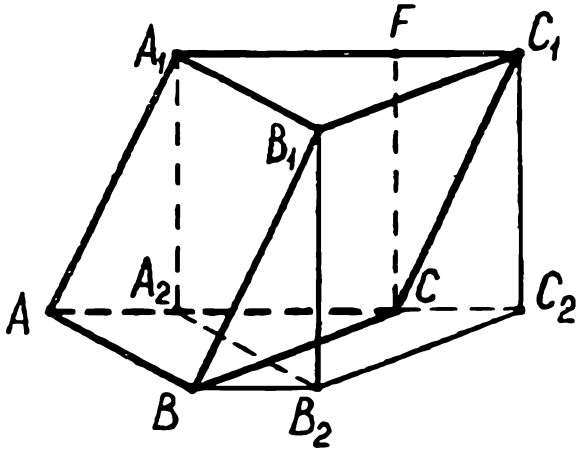
Кут SEO — шуканий.

$$\operatorname{tg} \angle SEO = \frac{SO}{OE} = \frac{3h}{\sqrt{5}\, a \sin\left(\alpha + \arcsin\dfrac{2}{3}\right)}.$$

II *випадок.* Точку O розміщено поза трапецією (мал. 226). Збережемо колишні позначення. Тепер $AK = KB = 7x$.

$$BO = \sqrt{(7x)^2 - x^2} = 4x\sqrt{3},\ AB = \sqrt{(8x)^2 + (4x\sqrt{3})^2} = 4x\sqrt{7},$$

$\sin\beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. Подальший розв'язок аналогічний наведеному в першому випадку.



Мал. 227

1.7. $\sqrt{b^2 - 7a^2}$ або $\sqrt{b^2 - 3a^2}$.

Розв'язання: I *випадок.* Грань AA_1C_1C перпендикулярна до площини основи (мал. 227).

Оскільки площа трапеції ABB_2C_2 вдвічі більша за площу трикутника ABC, то площі паралелограма BCC_2B_2 і трикутника ABC рівні. Звідси можна зробити висновок, що $CC_2 = FC_1 = \frac{1}{2}AC = a$. Але тоді $A_1F = A_2C = a$, отже, точка A_2 — середина відрізка AC. $A_2C_2 = A_2C + CC_2 = 2a$. Окрім того, $A_2B_2 = AB = 2a$ і $B_2C_2 = BC = 2a$, тобто трикутник $A_2B_2C_2$ рівнобічний. Маємо:

$$CB_2 = a\sqrt{3},\ AB_2 = \sqrt{AC^2 + CB_2^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{7}.$$

Звідси $B_1B_2 = \sqrt{AB_1^2 - AB_2^2} = \sqrt{b^2 - 7a^2}$.

II *випадок.* Грань BB_1C_1C перпендикулярна до площини основи (мал. 228).

Аналогічно першому випадку можна показати, що точка B_2 — середина сторони BC трикутника ABC. Тоді $AB_2 = a\sqrt{3}$. З трикутника AB_2B_1

$$B_1B_2 = \sqrt{AB_1^2 - AB_2^2} = \sqrt{b^2 - 3a^2}.$$

1.8. Якщо ортогональна проекція перерізу належить більшій частині основи піраміди, то

$$S = \frac{2a^2 \sin\alpha}{9\sin(\alpha + \beta)}\left(1 + \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}\right)$$

при $\beta \in [\,0;\ \operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}\alpha)]$, $S = \dfrac{a^2 \sin\alpha}{9\sin(\beta-\alpha)}\left(1 - \dfrac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right)$

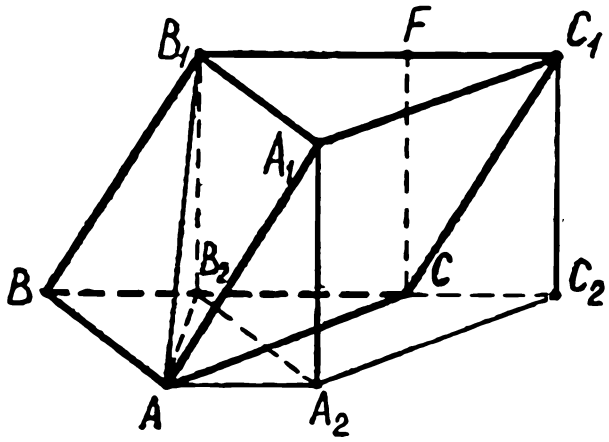
при $\beta \in \left[\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}\alpha);\ \dfrac{\pi}{2}\right]$; якщо ортогональна проекція перерізу належить меншій частині основи піраміди, то $S = \dfrac{a^2 \sin\alpha}{9\sin(\alpha+\beta)}\left(2 + \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right)$.

Розв'язання: нехай $ABCDS$ — дана піраміда (мал. 229). M і N — точки перетину ребер SA і SB з січною площиною. K, Q і P — середини відрізків AB, MN і EF відповідно,

$$\angle QKP = \alpha,\ \angle QPK = \beta.$$

Зрозуміло, що чотирикутник $ENMF$ — рівнобедрена трапеція з основами EF і MN.

$$EF = a,\ KP = \frac{2}{3}a.$$



Мал. 228

В трикутнику KQP

$$\frac{KP}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))} = \frac{QP}{\sin\alpha} = \frac{KQ}{\sin\beta}.$$

Звідси $QP = \dfrac{2a\sin\alpha}{3\sin(\alpha+\beta)}$ і $KQ = \dfrac{2a\sin\beta}{3\sin(\alpha+\beta)}$.

З подібності трикутників ABS і NMS

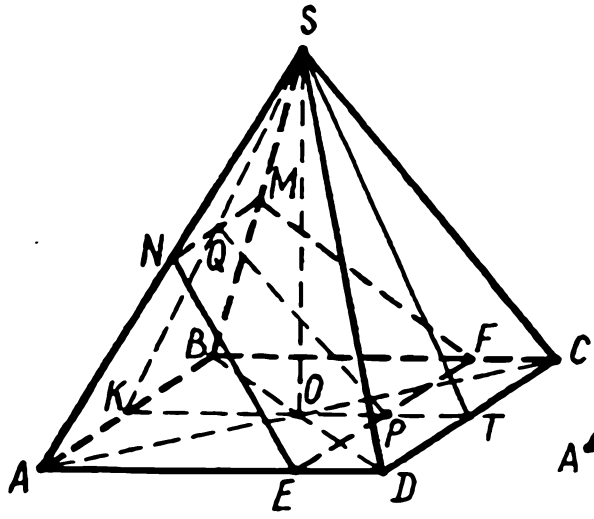
$$\frac{MN}{AB} = \frac{SQ}{SK} = \frac{SK-KQ}{SK} = 1 - \frac{KQ}{SK},$$

і, оскільки $SK = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$, одержуємо

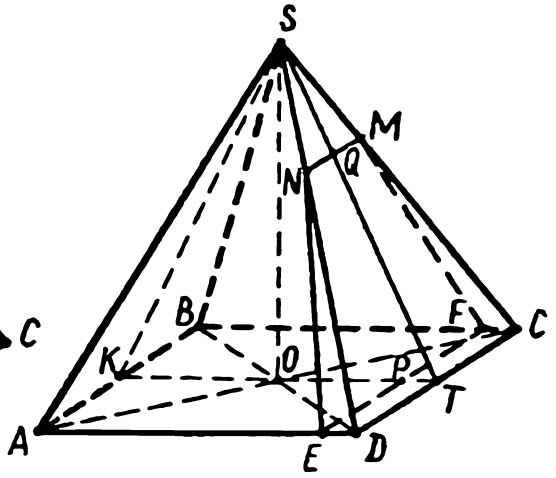
$$MN = AB\left(1 - \frac{KQ}{SK}\right) = a\left(1 - \frac{4\sin\beta\cos\alpha}{3\sin(\alpha+\beta)}\right).$$

Тоді

$$S_{ENMF} = \frac{EF+NM}{2}\cdot QP = \frac{2a^2\sin\alpha}{9\sin(\alpha+\beta)}\left(1 + \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right).$$



Мал. 229



Мал. 230

Зрозуміло, що наведений розв'язок відповідає тій геометричній конфігурації, коли точка Q належить відрізку KS (в тому числі і вироджені випадки $Q = K$ і $Q = S$). У цьому випадку β змінюється від 0 ($Q = K$) до $\operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg}\alpha)$ ($Q = S$).

Розглянемо випадок $\beta \in \left[\operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg}\alpha); \frac{\pi}{2}\right]$ (мал. 230). Тут $\angle QPO = \beta$, $\angle QTO = \alpha$, $PT = \frac{a}{3}$. Тоді з трикутника PTQ

$$QP = \frac{a \sin\alpha}{3 \sin(\beta - \alpha)} \text{ і } TQ = \frac{a \sin\beta}{3 \sin(\beta - \alpha)}.$$

З подібності трикутників DCS і NMS

$$\frac{MN}{CD} = \frac{SQ}{ST} = \frac{ST - TQ}{ST} = 1 - \frac{TQ}{ST}.$$

Звідси $MN = CD\left(1 - \frac{TQ}{ST}\right) = a\left(1 - \frac{2\cos\alpha \sin\beta}{3 \sin(\beta - \alpha)}\right)$ і

$$S_{EFMN} = \frac{EF + MN}{2} PQ = \frac{a^2 \sin\alpha}{9 \sin(\beta - \alpha)} \left(1 - \frac{2 \sin\alpha \cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}\right).$$

Залишилося розглянути той випадок, коли ортогональна проекція перерізу належить меншій з двох частин основи піраміди, тобто прямокутнику $EFCD$ (мал. 231).

У цьому випадку $\angle QPT = \beta$, $\beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Далі розв'язують як у першому випадку.

Література

1. *Габович И.Г.* Алгоритмический подход к решению геометрических задач. — К.: Рад. школа, 1989. — 160 с.

2. *Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И.* Курс геометрии 8-го класса в задачах. — Львов, 1991. — 96 с — (Квантор; №7).

3. *Горнштейн П.И., Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.* Подводные рифы конкурсного экзамена по математике. К.: Евроиндекс Лтд, 1994. — 240 с.

4. *Готман Э.Г., Скопец З.А.* Решение геометрических задач аналитическим методом. М.: Просвещение, 1979. — 128 с.

5. *Крайзман М.Л.* Розв'язування геометричних задач методом координат. — К.: Рад. школа, 1983. — 127 с.

6. *Кушнир И.А.* Построение треугольника (Энциклопедия решения задач). — К., 1993. — 71 с.

7. *Лоповок Л.М.* Сборник задач по геометрии для 6-8 классов. — К.: Рад. школа, 1985. — 104 с.

8. *Парахневич В.А., Парахневич Е.В.* Сборник задач по геометрии. — Мінськ: Нар. асвета, 1972. — 176 с.

9. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. Ч.2. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1991. — 240 с.

10. *Рабинович Е.М.* Равновеликие треугольники в задачах // Математика в школе. — 1993. — N3. — с. 63-65.

11. *Рабинович Е.М.* Сборник задач по планиметрии на готовых чертежах. — К., 1996.

12. *Рыбкин Н.А.* Сборник задач по геометрии. Часть I. Планиметрия. — Изд. 18-е. — Учпедгиз, 1952. — 120 с.

13. *Саранцев Г.И.* Сборник задач на геометрические преобразования. — М.: Просвещение, 1975. — 112 с.

14. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М.И.Сканави. — М.: Высшая школа, 1988. — 431 с.

15. *Цыпкин А.Г., Пинский А.И.* Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1989. — 576 с.

16. *Шарыгин И.Ф.* Учимся решать задачи по геометрии // Математика в школе. — 1989. — № 2-4.

ЗМІСТ

Від авторів 3
Глава I. Геометрія на готових кресленнях 5
Глава II. Метод ключових задач 46
§1. Паралельні прямі, що перетинають сторони кута 46
§2. Середини сторін чотирикутника 51
§3. Медіана, яку проведено до гіпотенузи 54
§4. Співвідношення в прямокутному трикутнику . 57
§5. Вписаний кут 61
§6. Кут між дотичною і хордою 66
§7. Величина кута, вершина якого лежить усередині кола (поза колом) 70
§8. Формула $a = 2R \sin \alpha$. 74
§9. Властивості хорд, що перетинаються 78
§10. Дотична і січна, проведені до кола з однієї точки 82
§11. Відношення площ трикутників, які мають спільну висоту (основу) 86
§12. Відношення площ подібних трикутників . . . 91
§13. Площі трикутників, на які чотирикутник поділено діагоналями 96
§14. Ознака паралельності сторін чотирикутника . 99
§15. Кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх і суміжних кутів 101
§16. Відстань від вершини трикутника до точки дотику вписаного кола зі стороною 105
§17. Властивості бісектриси кута трикутника . . . 110
§18. Друга ознака подібності трикутників 113
Глава III. Вибрані методи і прийоми 117
§1. «Подовження» медіани. 117
§2. Метод допоміжної площі 120

§3. Метод допоміжного кола 124
§4. Застосування центральної симетрії 135
§5. Застосування осьової симетрії 138
§6. Застосування перетворення повороту 142
§7. Застосування гомотетії 146
§8. Метод координат 150
§9. Застосування векторів 154
Глава IV. Багатоваріантні геометричні задачі 159
§1. Умова задачі не визначає взаємного розміщення точок і фігури 159
§2. В умові задачі фігурують два кола, що дотикаються, але не вказано спосіб дотику: зовнішній чи внутрішній. У задачі дано дві точки, які ділять коло на дві дуги, окрім того, відомо, що деяка пряма дотикається кола, але не вказано, на якій з двох дуг лежить точка дотику 172
§3. У задачі фігурують об'єкти, яким приписують визначені властивості, але не зазначено порядок відповідності між множиною об'єктів і множиною їх властивостей. 178
Відповіді. Вказівки. Розв'язки 192
Література 253

Навчальне видання

ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович,

РАБИНОВИЧ Юхим Михайлович,

ЯКІР Михайло Семенович

ВЧИМОСЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ З ГЕОМЕТРІЇ

Рекомендовано Міністерством освіти України (лист № 1/11-791 від 6.05.97)

За редакцією авторів

Художник **О.М. Жураковська**

Технічний редактор **А.М. Вербовіков**

Коректор **М.Ю. Рабинович**

Підп. до друку 16.12.97. Формат 84×108/32.
Папір друк. № 2. Друк високий. Гарнітура Таймс.
Умов.-друк. арк. 13,44. Обл.-вид. арк. 22,7.
Тираж 10 000 прим. Зам. № 7–1267.

МСП Науково-практичний, навчально-методичний центр «Магістр-S»
Творчої спілки вчителів України

252030, Київ-30, вул. Б. Хмельницького, 16/18.
Тел./факс (044) 229-89-29; 228-65-05.

Головне підприємство
республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига»,

252057, Київ, вул. Довженка, 3.

МагістрЪ